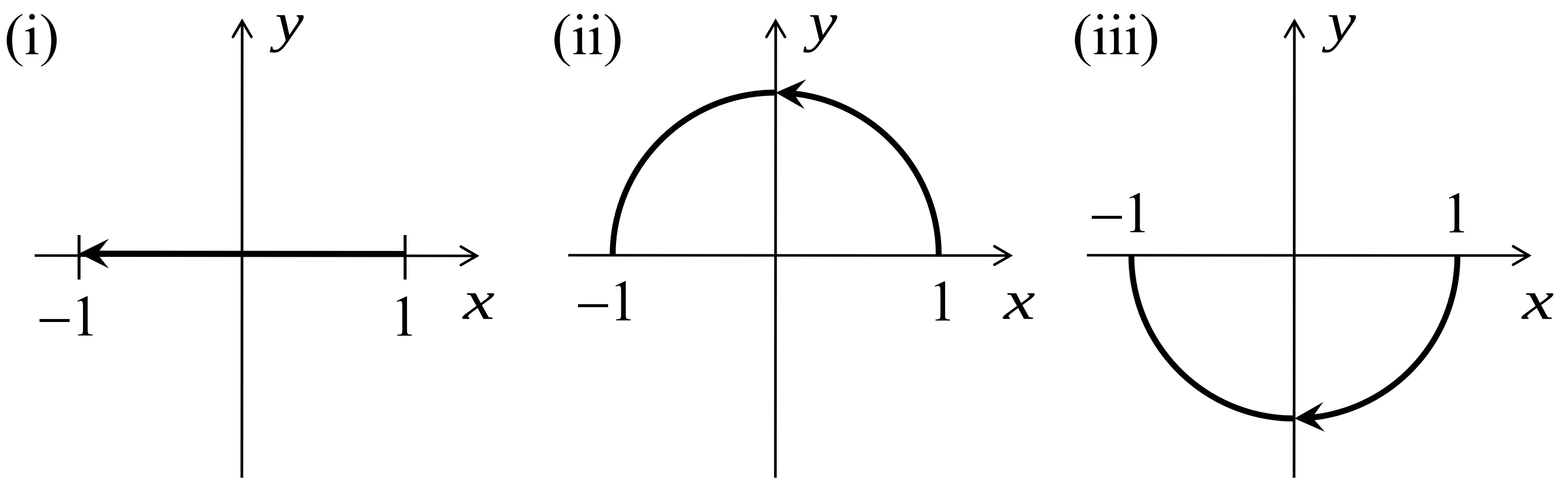
I.

積分経路上で、z と積分範囲がどのように表現されるかがポイント。



	(i)	(ii)	(iii)
z:	x	$\exp(i\theta)$	$\exp(i\theta)$
積分範囲:	$1 \to -1$	$0 \to \pi$	$0 \to -\pi$
dz:	dx	$i\exp(i\theta)\,d\theta$	$i\exp(i\theta)\,d\theta$

(a) (i) $$\int_{C\text{-i}} |z|\,dz = \int_1^{-1} |x|\,dx = \int_1^0 x\,dx + \int_0^{-1} (-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^0 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-1} = -1.$$

(ii) $$\int_{C\text{-ii}} |z|\,dz = \int_0^{\pi} \left|\exp(i\theta)\right| i\exp(i\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} i\exp(i\theta)\,d\theta = \left[\exp(i\theta)\right]_0^{\pi} = -2.$$

(iii) $$\int_{C\text{-iii}} |z|\,dz = \int_0^{-\pi} \left|\exp(i\theta)\right| i\exp(i\theta)\,d\theta = \left[\exp(i\theta)\right]_0^{-\pi} = -2.$$

	(i)	(ii)	(iii)
z:	x	$\exp(i\theta)$	$\exp(i\theta)$
積分範囲:	$1 \to -1$	$0 \to \pi$	$0 \to -\pi$
dz:	dx	$i\exp(i\theta)\, d\theta$	$i\exp(i\theta)\, d\theta$

(b) (i) $\int_{C\text{-i}} \mathrm{Arg}(z)\,dz = \int_1^{-1} \mathrm{Arg}(x)\,dx = \int_1^0 0dx + \int_0^{-1} \pi dx = -\pi.$

(ii) $\int_{C\text{-ii}} \mathrm{Arg}(z)\,dz = \int_0^{\pi} \mathrm{Arg}\big(\exp(i\theta)\big) i\exp(i\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi} \theta i\exp(i\theta)\,d\theta$

$$= \left[\theta\exp(i\theta)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \exp(i\theta)\,d\theta = -\pi - \left[\frac{1}{i}\exp(i\theta)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi + i(-1-1) = -\pi - 2i.$$

(iii) $\int_{C\text{-iii}} \mathrm{Arg}(z)\,dz = \int_0^{-\pi} \mathrm{Arg}\big(\exp(i\theta)\big) i\exp(i\theta)\,d\theta$

$$= \left[\theta\exp(i\theta)\right]_0^{-\pi} - \int_0^{-\pi} \exp(i\theta)\,d\theta = \pi - \left[\frac{1}{i}\exp(i\theta)\right]_0^{-\pi} = \pi - 2i.$$

II.

(a) 被積分関数 $\dfrac{\exp(iz)-1}{z^2}$ は、積分経路C内に極を持たない(正則)。

⇨ コーシーの積分定理より、$\displaystyle\int_C \frac{\exp(iz)-1}{z^2}dz = 0.$

(b) 問題 I.と同様にすれば良い。

$$\begin{cases} z = r\exp(i\theta), \\ dz = ir\exp(i\theta)\,d\theta \end{cases}$$

$$C_1: \int_{C_1} \frac{\exp(iz)-1}{z^2}dz = \int_\pi^0 \frac{\exp\left(ir\exp(i\theta)\right)-1}{\left(r\exp(i\theta)\right)^2} ir\exp(i\theta)\,d\theta$$

$$= \int_\pi^0 \frac{\exp\left(ir(\cos\theta + i\sin\theta)\right)-1}{r\exp(i\theta)} id\theta \equiv I_1.$$

$$C_2: \int_{C_2} \frac{\exp(iz)-1}{z^2}dz = \int_r^R \frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx \equiv I_2.$$

$$C_3: \int_{C_3} \frac{\exp(iz)-1}{z^2}dz = \int_0^\pi \frac{\exp\left(iR(\cos\theta + i\sin\theta)\right)-1}{R\exp(i\theta)} id\theta \equiv I_3.$$

$$C_4: \int_{C_4} \frac{\exp(iz)-1}{z^2}dz = \int_{-R}^{-r} \frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx \equiv I_4.$$

(c) $I_3 = \int_0^{\pi} \frac{\exp\left(iR\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right)}{R\exp\left(i\theta\right)} id\theta - \int_0^{\pi} \frac{1}{R\exp\left(i\theta\right)} id\theta$

右辺第2項: $-\int_0^{\pi} \frac{\exp\left(-i\theta\right)}{R} id\theta = \left[\frac{\exp\left(-i\theta\right)}{R}\right]_0^{\pi} = \frac{-2}{R}$

$\Rightarrow R \to \infty$ の極限で0.

右辺第1項: $\left|\int_0^{\pi} \frac{\exp\left(iR\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right)}{R\exp\left(i\theta\right)} id\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|\frac{\exp\left(iR\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right)}{R\exp\left(i\theta\right)} i\right| d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\exp\left(-R\sin\theta\right)}{R} d\theta \le \int_0^{\pi} \frac{1}{R} d\theta = \frac{\pi}{R} \to 0 \quad \left(R \to \infty\right).$$

$\sin\theta \ge 0$

よって、$R \to \infty$ の極限で I_3 は0となる。

(d) $I_1 = \int_{\pi}^{0} \frac{\exp\left(ir\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right) - 1}{r\exp\left(i\theta\right)} id\theta$

分子の指数関数部分を $r = 0$ のまわりで展開すると、

$$\exp\left(ir\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\right) = \exp\left(ir\exp\left(i\theta\right)\right) = 1 + r\left(i\exp\left(i\theta\right)\right) + \frac{1}{2}r^2\left(i\exp\left(i\theta\right)\right)^2 + \ldots$$

これを I_1 の表式に代入すれば良いが、展開式のうち r の2次以上の項は、$r \to 0$ の極限を取ると0になる。よって、この極限を取ることを前提として、

$$\lim_{r\to 0} I_1 = \lim_{r\to 0} \int_{\pi}^{0} \frac{1 + ri\exp\left(i\theta\right) - 1}{r\exp\left(i\theta\right)} id\theta = \lim_{r\to 0} \int_{\pi}^{0} \left(-1\right) d\theta = \int_{0}^{\pi} d\theta = \pi$$

を得る。

(e) $I_2=\int_r^R \frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx,\quad I_4=\int_{-R}^{-r}\frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx.$

$R\to\infty,\ \ r\to 0$ の極限を取ると、

$$I_2\to\int_0^\infty \frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx,\quad I_4\to\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx.$$

(f) (2)式と(b)より、$I_1+I_2+I_3+I_4=0.\quad R\to\infty,\ \ r\to 0$ の極限を取り、(c)から(e)の結果を代入すると、

$$\pi+\int_0^\infty \frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp(ix)-1}{x^2}dx=0.$$

(g) (3)式の実数部を取ると、

x について偶関数

$$\pi+\int_0^\infty \frac{\cos x-1}{x^2}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\cos x-1}{x^2}dx=\pi+2\int_0^\infty \frac{\cos x-1}{x^2}dx=0.$$

よって、

$$\int_0^\infty \frac{\cos x-1}{x^2}dx=-\frac{\pi}{2}.$$

III.

I.と同様にして計算する。

(a) $$\int_C z^* dz = \int_0^\pi \left(\exp(i\theta)\right)^* i\exp(i\theta)\, d\theta = \int_0^\pi i\, d\theta = i\pi.$$

(b) $$\int_C \frac{1}{\sqrt{z}} dz = \int_0^\pi \frac{i\exp(i\theta)}{\sqrt{\exp(i\theta)}} d\theta = \int_0^\pi \frac{i\exp(i\theta)}{\exp(i\theta/2)} d\theta$$

$$= \int_0^\pi i\exp(i\theta/2)\, d\theta = 2\left[\exp(i\theta/2)\right]_0^\pi = 2(i-1).$$

(c) $$\int_C z^{1/n} dz = \int_0^\pi \left(\exp(i\theta)\right)^{1/n} i\exp(i\theta)\, d\theta = \int_0^\pi \exp(i\theta/n) i\exp(i\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi i\exp\left(i\theta(1+1/n)\right) d\theta = \frac{1}{1+1/n}\left[\exp\left(i\theta(1+1/n)\right)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{n}{n+1}\left\{\exp\left(i\pi(n+1)/n\right) - 1\right\}.$$

IV.

略。例えば、寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」の5.12節を参照。