2006 年度 統計力学 II 中間試験問題

2006 年 6 月 7 日 (水) 制限時間 45 分 担当 吉森 明

問題用紙 2 枚、解答用紙 2 枚（裏を使っても良い）。解答用紙が足りないときは、申し出れば 3 枚以上使える。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと。問題番号は、はっきり書きなさい。

すべての問題で、$\hbar$ は、プランク定数を 2π で割ったもの、$k_{\rm B}$ は、ボルツマン定数を表す。また、1 粒子の状態は密に詰まっている。

解答は、式変形の途中も書くこと。特に指示がなければ、答えは問題で与えられている変数のみで表しなさい。なお、公式が最後に与えられているので、参考にしなさい。

1. d 次元空間の 1 辺が長さ L の図形 (2 次元であれば正方形、3 次元では立方体等) に閉じ込められた $N(N \gg 1)$ 個の理想フェルミ気体を考える。内部自由度は無視して以下の問いに答えよ。
   (a) 粒子の質量を m として、1 粒子のエネルギー固有値が $\epsilon_{\mathbf{n}} = \hbar^2|\mathbf{k_n}|^2/2m$ で与えられているとする。ただし、$\mathbf{k_n}$ は d 次元の波数ベクトルで、$|\mathbf{k_n}|$ はその絶対値を表す。また、この波数ベクトルは、
   $$\mathbf{k_n} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_d = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1}$$
   で書けている。ここで、$\mathbf{n}$ は d 次元のベクトルで、$(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ はその成分を表す。この系の状態密度 $D(\epsilon)$ が
   $$D(\epsilon) = A\frac{L^d}{\Gamma(x)}\epsilon^{\alpha}, \qquad \epsilon > 0 \tag{2}$$
   と表せるとき、A、x、α を求めなさい。ただし、$\Gamma(x)$ は、ガンマ関数を表す。
   (b) フェルミエネルギー ϵ_F を $\Gamma(x)$、A、N、L^d、α で表しなさい。
   (c) 絶対零度における系の全エネルギー E を
   $$E = aN\epsilon_F \tag{3}$$
   と表すとき、a を α で表しなさい。

2. 問題 1 と同じ d 次元空間 $(d > 2)$ にある長さ L の図形に閉じ込められた $N(N \gg 1)$ 個の理想ボース気体を考える。問題 1 と同様、内部自由度は無視する。ボース-アインシュタイン凝縮が起こる温度を T_c とすると、温度 $T(< T_c)$ での比熱 C_L を求めよ。ただし、

$$\zeta(y) \equiv \frac{1}{\Gamma(y)} \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{e^x - 1} dx \tag{4}$$

で定義されるツェーター関数 $\zeta(y)$ と $\Gamma(x)$、A、N、L^d、α、$\Gamma(y)$、k_{B}、T を使いなさい。全部使っても使わなくても良い。y は必ず α で表すこと。また、ここでいう比熱 C_L は、

$$C_L \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{LN} \tag{5}$$

で定義されている。

必要なら次の公式を使っても良い。

① 半径 r の d 次元の球の体積を Ω とすると、

$$\Omega = \frac{\pi^{d/2} r^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \tag{6}$$

② 多粒子系のグランドカノニカル分布で、

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_{\mathrm{B}} T} \pm 1} \tag{7}$$

複号は、上のほうがフェルミ-ディラック統計、下のほうがボース-アインシュタイン統計を表す。