2006 年度 統計力学 II 中間試験 (追試) 問題

2006 年 6 月 30 日 (金）制限時間 45 分 担当 吉森 明

問題用紙 2 枚、解答用紙 2 枚（裏を使っても良い)。解答用紙が足りないときは、申し出れば 3 枚以上使える。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと。問題番号は、はっきり書きなさい。

すべての問題で、$\hbar$ は、プランク定数を 2π で割ったもの、$k_{\rm B}$ は、ボルツマン定数を表す。また、1 粒子の状態は密に詰まっている。

解答は、式変形の途中も書くこと。特に指示がなければ、答えは問題で与えられている変数のみで表しなさい。なお、公式が最後に与えられているので、参考にしなさい。

1. d 次元空間の 1 辺が長さ L の図形 (2 次元であれば正方形、3 次元では立方体等) に閉じ込められた $N(N \gg 1)$ 個の理想フェルミ気体を考える。内部自由度は無視して以下の問いに答えよ。

   (a) 粒子の質量を m として、1 粒子のエネルギー固有値が $\epsilon_{\mathbf{n}} = \hbar^2 |\mathbf{k_n}|^2/2m$ で与えられているとする。ただし、$\mathbf{k_n}$ は d 次元の波数ベクトルで、$|\mathbf{k_n}|$ はその絶対値を表す。また、この波数ベクトルは、

$$\mathbf{k_n} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n} \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_d = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1}$$

   で書けている。ここで、$\mathbf{n}$ は d 次元のベクトルで、$(n_1, n_2, \ldots, n_d)$ はその成分を表す。この系の状態密度 $D(\epsilon)$ が

$$D(\epsilon) = \frac{d}{2}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{d/2} \frac{L^d}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\epsilon^{\frac{d}{2}-1}, \qquad \epsilon > 0 \tag{2}$$

   と表せる事を示しなさい。ただし、$\Gamma(x)$ は、ガンマ関数を表す。

   (b) フェルミエネルギー ϵ_F が

$$\epsilon_F = \frac{2\pi\hbar^2}{mL^2}\left\{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)N\right\}^{2/d} \tag{3}$$

   と書ける事を示しなさい。

   (c) 絶対零度における系の全エネルギー E が

$$E = \frac{d}{d+2}N\epsilon_F \tag{4}$$

   と表せる事を示しなさい。

2. 問題 1 と同じ d 次元空間 $(d > 2)$ にある長さ L の図形に閉じ込められた $N(N \gg 1)$ 個の理想ボース気体を考える。問題 1 と同様、内部自由度は無視する。ボース-アインシュタイン凝縮が起こる温度 T_c を

$$T_c = A\frac{2\pi\hbar^2}{mL^2k_{\mathrm{B}}} \tag{5}$$

と表すとき、A を d、N、および $\zeta(y)$ を使って表せ。ただし、$\zeta(y)$ は

$$\zeta(y) \equiv \frac{1}{\Gamma(y)}\int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{e^x - 1}dx \tag{6}$$

で定義されるツェーター関数で、y は必ず d で表すこと。また、$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ を使っても良い。

必要なら次の公式を使っても良い。

① 半径 r の d 次元の球の体積を Ω とすると、

$$\Omega = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}r^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \tag{7}$$

② 多粒子系のグランドカノニカル分布で、

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_{\mathrm{B}}T} \pm 1} \tag{8}$$

複号は、上のほうがフェルミ-ディラック統計、下のほうがボース-アインシュタイン統計を表す。