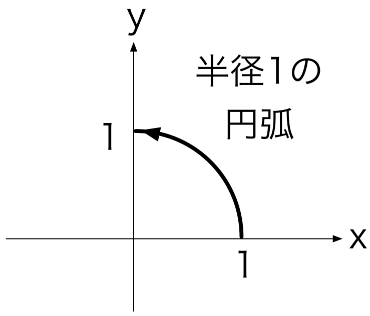
2009 年度物理数学 II 宿題 2 (10 月 19 日出題、26 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 下の積分路で $f(z) = z^2$ を積分しなさい。ヒント $z = e^{i\theta}$ に変数変換



[解答] 積分路を C とすると、

$$\int_C f(z)dz = \int_C z^2 dz \tag{1}$$

C 上では $z = e^{i\theta}$ だから z から θ に変数変換する。$dz = e^{i\theta} i d\theta$ だから

$$= \int_0^{\pi/2} e^{2i\theta} e^{i\theta} i d\theta \tag{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{3i\theta} i d\theta \tag{3}$$

$$= \left[\frac{i}{3i} e^{3i\theta} \right]_0^{\pi/2} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\exp\left[\frac{3\pi}{2} i \right] - 1 \right) \tag{5}$$

$e^{(3\pi/2)i} = -i$ だから

$$= \frac{1}{3} (-i - 1) \tag{6}$$

[問題 2.] $f(z) = e^{iz}/z$ が $z \neq 0$ で正則であることを示せ。

[解答] コーシーリーマンの条件にあてはめる。$z = x + iy$ (x、y は実数) を代入すると、

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{\exp[i(x+iy)]}{x+iy} \tag{7}$$

$$= \frac{\exp[ix-y]}{x+iy} \tag{8}$$

分母を有理化して

$$= \frac{\exp[ix-y](x-iy)}{x^2+y^2} \tag{9}$$

オイラーの公式を使うと

$$= \frac{\exp[-y](\cos x + i\sin x)(x-iy)}{x^2+y^2} \tag{10}$$

$$= \frac{\exp[-y]\{(x\cos x + y\sin x) + i(x\sin x - y\cos x)\}}{x^2+y^2} \tag{11}$$

つまり、$f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $u(x,y)$、$v(x,y)$ とすると、

$$u(x,y) = \frac{\exp[-y](x\cos x + y\sin x)}{x^2+y^2} \tag{12}$$

$$v(x,y) = \frac{\exp[-y](x\sin x - y\cos x)}{x^2+y^2} \tag{13}$$

これらから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\{\exp[-y](\cos x - x\sin x + y\cos x)(x^2+y^2)\\&- 2x\exp[-y](x\cos x + y\sin x)\} \qquad (14)\\&= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(-x^2\cos x - x^3\sin x + yx^2\cos x)\\&+ (\cos x - x\sin x + y\cos x)y^2 - 2xy\sin x\} \qquad (15)\\&= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(-x^2+yx^2+y^2+y^3)\cos x\\&+ (-x^3 - xy^2 - 2xy)\sin x\} \qquad (16)\\\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}[\{-\exp[-y](x\sin x - y\cos x)\\&+ \exp[-y](-\cos x)\}(x^2+y^2) - 2y\exp[-y](x\sin x - y\cos x)]\\&\qquad (17)\\&= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{-(x\sin x - y\cos x + \cos x)x^2\\&- (xy^2\sin x - y^3\cos x - y^2\cos x) - 2yx\sin x\} \qquad (18)\\&= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(yx^2 - x^2 + y^3 + y^2)\cos x\\&+ (-x^3 - xy^2 - 2yx)\sin x\} \qquad (19)\end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad (20)$$

また、

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\{\exp[-y](-x\cos x - y\sin x + \sin x)(x^2+y^2)$$
$$- 2y\exp[-y](x\cos x + y\sin x)\} \tag{21}$$
$$= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(-x^3 - y^2x - 2yx)\cos x$$
$$+ (-x^2y - y^3 + x^2 + y^2 - 2y^2)\sin x\} \tag{22}$$
$$= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(-x^3 - y^2x - 2yx)\cos x$$
$$+ (-x^2y - y^3 + x^2 - y^2)\sin x\} \tag{23}$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}[\exp[-y](\sin x + x\cos x + y\sin x)(x^2+y^2)$$
$$- 2x\exp[-y](x\sin x - y\cos x)] \tag{24}$$
$$= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(x^3 + xy^2 + 2xy)\cos x$$
$$+ (x^2 + y^2 + yx^2 + y^3 - 2x^2)\sin x\} \tag{25}$$
$$= \frac{\exp[-y]}{(x^2+y^2)^2}\{(x^3 + xy^2 + 2xy)\cos x$$
$$+ (-x^2 + y^2 + yx^2 + y^3)\sin x\} \tag{26}$$

したがって、

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{27}$$

(20) 式と (27) 式はコーシーリーマンの条件そのものを表している。