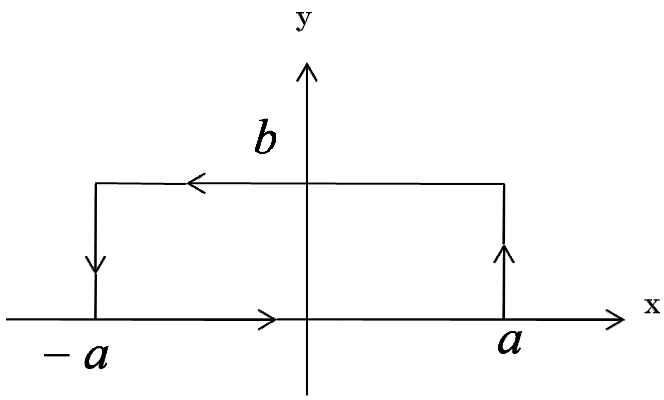
2009 年度物理数学 II 宿題 (11 月 2 日出題、9 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.]　(1) 図のような積分路 C で $\int_C \exp[-z^2]dz$ を計算することで $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2]\cos(2bx)dx$ を求めよ。




(2) 前回演習の問題 No4[Ⅱ](c)〜(g) をやりなさい。

[解答] (1) a) $\exp[-z^2]$ は全複素平面内で正則なので、積分路を $C$ とすると、$C$ および $C$ 内で正則。したがって、コーシーの積分定理より

$$\int_C \exp[-z^2]dz = 0 \tag{1}$$

b) 長方形の積分路の各辺を右端から反時計回りに $C_1$、$C_2$、$C_3$、$C_4$ とすると、積分路 $C$ での積分は、各積分路の積分の和で書けるから、

$$\int_C \exp[-z^2]dz$$
$$= \int_{C_1} \exp[-z^2]dz + \int_{C_2} \exp[-z^2]dz + \int_{C_3} \exp[-z^2]dz + \int_{C_4} \exp[-z^2]dz$$
$$= 0 \tag{2}$$

それぞれの積分路を変数変換で実数の積分変数に直すと、

$C_1$: $z = a + iy$ だから

$$\int_{C_1} \exp[-z^2]dz = \int_0^b \exp[-(a+iy)^2]idy \tag{3}$$

$$= \int_0^b \exp[-a^2 - 2iay + y^2]idy \tag{4}$$

$C_2$: $z = x + ib$ だから

$$\int_{C_2} \exp[-z^2]dz = \int_a^{-a} \exp[-(x+ib)^2]dx \tag{5}$$

$$= \int_a^{-a} \exp[-x^2 - 2ixb + b^2]dx \tag{6}$$

オイラーの公式から

$$= \int_a^{-a} \exp[-x^2 + b^2]\{\cos(2xb) - i\sin(2xb)\}dx \tag{7}$$

$\sin(2xb)$ は奇関数なので

$$= \int_a^{-a} \exp[-x^2 + b^2]\cos(2xb)dx \tag{8}$$

$C_3$: $z = -a + iy$ だから

$$\int_{C_3} \exp[-z^2]dz = \int_b^0 \exp[-(-a+iy)^2]idy \tag{9}$$

$$= \int_b^0 \exp[-a^2 + 2iay + y^2]idy \tag{10}$$

$C_4$: $z = x$ だから

$$\int_{C_4} \exp[-z^2]dz = \int_{-a}^a \exp[-x^2]dx \tag{11}$$

c) $\boxed{a \to \infty}$にする。$C_1$ に沿った積分は

$$|\int_0^b \exp[-a^2 - 2iay + y^2]idy| \leq \int_0^b |\exp[-a^2 - 2iay + y^2]i|dy \tag{12}$$

指数関数の性質から

$$\exp[-a^2 - 2iay + y^2] = \exp[-a^2]\exp[-2iay]\exp[y^2] \tag{13}$$

絶対値の性質から

$$|\exp[-a^2 - 2iay + y^2]i| = |\exp[-a^2]||\exp[-2iay]||\exp[y^2]||i| \tag{14}$$

$|\exp[-2iay]| = 1$、$|i| = 1$ なので

$$\begin{aligned} &= |\exp[-a^2]||\exp[y^2]| &(15)\\ &= \exp[-a^2]\exp[y^2] &(16)\end{aligned}$$

これを (12) 式の右辺に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_0^b |\exp[-a^2 - 2iay + y^2]i|dy &= \int_0^b \exp[-a^2]\exp[y^2]dy &(17)\\ &= \exp[-a^2]\int_0^b \exp[y^2]dy &(18)\end{aligned}$$

これは、$a \to \infty$ で 0 になる。したがって、(12) 式から

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^b \exp[-a^2 - 2iay + y^2]idy = 0 \tag{19}$$

$C_2$ は、そのまま $a$ を無限大にして、

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{-a} \exp[-x^2 + b^2]\cos(2xb)dx = \int_\infty^{-\infty} \exp[-x^2 + b^2]\cos(2xb)dx \tag{20}$$

$C_3$ は $C_1$ と同様に

$$\lim_{a\to\infty}\int_b^0 \exp[-a^2 + 2iay + y^2]idy = 0 \tag{21}$$

$C_4$ も、そのまま $a$ を無限大にして、

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a \exp[-x^2]dx = \int_{-\infty}^\infty \exp[-x^2]dx \tag{22}$$

これは計算できて

$$= \sqrt{\pi} \tag{23}$$

d) (19) 式、(20) 式、(21) 式、(23) 式を (2) 式に代入すると、

$$0 + \int_{\infty}^{-\infty} \exp[-x^2 + b^2] \cos(2xb) dx + 0 + \sqrt{\pi} = 0 \tag{24}$$

適当に移項すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] \cos(2xb) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2} \tag{25}$$

(2) 別紙

[問題 2.] $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ は $z = 0$ で真性特異点をもつことを示し、$z \to 0$ の近づけ方を変えることで任意の複素数に $f(z)$ を近づけられることを示せ。

[解答] 真性特異点の定義は「$\lim_{z \to a}$ の値が $z$ の $a$ の近づけ方で変わる」だから、$z$ を実軸の正の方から近づけるとすると、$z = x$($x$ は正の実数) として、

$$\lim_{x \to 0} \exp(\frac{1}{x}) = \infty \tag{26}$$

また、$z$ を実軸の負の方から近づけるとすると、$z = x'$($x'$ は負の実数) として、

$$\lim_{x' \to 0} \exp(\frac{1}{x'}) = 0 \tag{27}$$

したがって、$\exp[1/z]$ は $z = 0$ で真性特異点をもつ。

今、任意の複素数を $re^{i\theta}$($r$ と $\theta$ は実数) で表すとすると、

$$z = \frac{1}{\ln r + i(\theta + 2\pi n)} \tag{28}$$

として $n \to \infty$ にすると、$z \to 0$ だが、

$$\lim_{n \to \infty} f(z) = re^{i\theta} \tag{29}$$

が示せる。実際、

$$\lim_{n\to\infty} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{\ln r + i(\theta + 2\pi n)}) = \lim_{n\to\infty} \exp[\ln r + i(\theta + 2\pi n)] \quad (30)$$

で、$\exp[\ln r + i(\theta + 2\pi n)]$ は $n$ によらず、$re^{i\theta}$ になる。