2009 年度物理数学 II 宿題 (11 月 16 日出題、30 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $f(z) = 1/(z-1)(z-2i)$ を $z = 0$ のまわりでローラント (テーラー) 展開しなさい。収束半径を自分で考えて 3 通りの展開をしなさい。

[解答] 特異点は $z = 1$ と $2i$ なので、複素平面における原点からの距離を r とすると、

$$r < 1、\qquad 1 < r < 2、\qquad 2 < r \tag{1}$$

の 3 つに分けられる。

(i) $\underline{r < 1}$:

このの r の範囲で円をつくると、円内には特異点はないので、テーラー展開になる。

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \tag{2}$$

ここで $f^{(n)}(0)$ は $f(z)$ を n 階微分の微係数に $z = 0$ を代入したもの。$f^{(n)}(0)$ を計算するために $f(z)$ を部分分数展開すると、

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2i} \right\} \frac{1}{-2i+1} \tag{3}$$

$f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ を n 階微分の微係数として、

$$f^{(1)}(z) = \frac{1}{-2i+1} \left\{ \frac{-1}{(z-1)^2} - \frac{-1}{(z-2i)^2} \right\} \tag{4}$$

$$f^{(2)}(z) = \frac{1}{-2i+1} \left\{ \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{2}{(z-2i)^3} \right\} \tag{5}$$

同様に

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{-2i+1} \left\{ \frac{(-1)^n n!}{(z-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(z-2i)^{n+1}} \right\} \tag{6}$$

したがって、

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{-2i+1}\left\{\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(-2i)^{n+1}}\right\} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{-2i+1}\left\{-n! + \frac{n!}{(2i)^{n+1}}\right\} \tag{8}$$

これを (2) 式に代入すると、

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{-2i+1}\left\{-1 + \frac{1}{(2i)^{n+1}}\right\} z^n \tag{9}$$

(ii) $\underline{1 < r < 2}$:

　この r の範囲で円をつくると、円内に $z = 1$ の特異点があるので、ローラント展開になる。[*1]

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \tag{10}$$

c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(w-1)(w-2i)w^{n+1}}dw \tag{11}$$

ここで、積分路 C は原点を中心にして半径 r の円を反時計回りの向きにとる。この積分は留数定理から計算できる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(w-1)(w-2i)w^{n+1}}dw = Res(1; f) + Res(0; f) \tag{12}$$

$z = 1$ は 1 位の極なので、

$$Res(1; f) = \frac{1}{(1-2i)} \tag{13}$$

[*1] 授業では、c_{-n} の足し合わせは、$\sum_{n=0}^{\infty}$ と書きましたが、$\sum_{n=1}^{\infty}$ の間違えです。　申し訳ありません。お詫び申し上げます。

$Res(0;f)$ は $z=0$ が $n+1$ の極なので、授業でやった公式 (中西ノート P14) を使って、

$$Res(0;f) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^n [z^{n+1}\frac{1}{(z-1)(z-2i)z^{n+1}}] \tag{14}$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^n [\frac{1}{(z-1)(z-2i)}] \tag{15}$$

$$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{16}$$

(8) 式から

$$= \frac{1}{-2i+1}\left\{-1+\frac{1}{(2i)^{n+1}}\right\} \tag{17}$$

したがって、

$$c_n = \frac{1}{-2i+1}\frac{1}{(2i)^{n+1}} \tag{18}$$

c_{-n} は[*2]

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(w)w^{n-1}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(w-1)(w-2i)}w^{n-1}dw \tag{19}$$

この積分は留数定理から簡単に積分できて

$$= \frac{1}{(1-2i)} \tag{20}$$

(iii) $\underline{2<r}$:

この r の範囲で円をつくると、円内に $z=1$ と $z=2i$ の 2 つの特異点があるので、ローラント展開になる。

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2i)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} \tag{21}$$

[*2] 授業では、w^n としていましたが、w^{n-1} の間違えです。 申し訳ありません。お詫び申し上げます。

c_n は、

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{1}{(w-1)(w-2i)w^{n+1}} dw \tag{22}$$

ここで、積分路 C' は原点を中心にして半径 r の円を反時計回りの向きにとる。(ii) と同様に留数定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{1}{(w-1)(w-2i)w^{n+1}} dw = Res(1;f) + Res(2i;f) + Res(0;f) \tag{23}$$

$Res(1;f)$ と $Res(0;f)$ は、(ii) と同じ。$Res(2i;f)$ は、

$$Res(2i;f) = \frac{1}{(2i-1)(2i)^{n+1}} \tag{24}$$

全部足すと、$c_n = 0$ となる。

c_{-n} は

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(w) w^{n-1} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{1}{(w-1)(w-2i)} w^{n-1} dw \tag{25}$$

ここで、この積分も留数定理から積分できるが、極が 2 つあることに注意すると、

$$= \frac{1}{(1-2i)} + \frac{1}{(2i-1)}(2i)^{n-1} \tag{26}$$

[別解] 部分分数展開すれば、(3) 式が得られるので、

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} \tag{27}$$

(i) の場合、$|z| < 1$ なので、等比級数に置き換えられる。

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{28}$$

同様に $|z| < 2$ なので、

$$\frac{1}{z-2i} = -\frac{1}{2i}\frac{1}{1-z/(2i)} = -\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n \tag{29}$$

したがって、(9) 式と同じになる。

(ii) の場合は、$|z| > 1$ なので、

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \tag{30}$$

$1/(z-2i)$ の方は (29) 式と同じなので、最初の解き方と同じになる。

(iii) の場合は、(30) 式は同じだが、$|z| > 2$ なので、

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-2i/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n \tag{31}$$

[問題 2.] r を複素数とした時、$|r| < 1$ で $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ が収束することを示しなさい。

[解答] 項を無限まで足し合わせず、途中で打ち切ると、

$$\sum_{n=0}^{N} r^n - \frac{1}{1-r} = \frac{1-r^N}{1-r} - \frac{1}{1-r} \tag{32}$$

$$= \frac{-r^N}{1-r} \tag{33}$$

両辺の絶対値をとると、

$$|\sum_{n=0}^{N} r^n - \frac{1}{1-r}| = |\frac{-r^N}{1-r}| = \frac{|r|^N}{|1-r|} \tag{34}$$

$|r| < 1$ なので、$N \to \infty$ で右辺は 0 になる。