

2009 年度物理数学 II 宿題 (11 月 30 日出題、12 月 7 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $f(z) = z^{1/3}$ のリーマン面を説明しなさい。複素平面は何枚必要か。

[解答] 複素平面を 3 枚用意する。 $\exp[i\theta]$ と $\exp[i(\theta + 2\pi)]$ と $\exp[i(\theta + 4\pi)]$ は本来同じだが、別の複素平面だと思って区別する。つまり、

$$z = \exp[i\theta] \text{ は } f(z) = \exp\left[i\frac{\theta}{3}\right] \quad (1)$$

$$z = \exp[i(\theta + 2\pi)] \text{ は } f(z) = \exp\left[i\frac{\theta}{3} + i\frac{2\pi}{3}\right] \quad (2)$$

$$z = \exp[i(\theta + 4\pi)] \text{ は } f(z) = \exp\left[i\frac{\theta}{3} + i\frac{4\pi}{3}\right] \quad (3)$$

に対応させる。ただし、 θ が 2π と 4π を横切るとき、別の複素平面に移り変わると考える。3 回まわると元に戻る。

[問題 2.] a を正の実数として $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z/a)^n$ は $|z| < a$ でしか定義されないが、これを $z \neq a$ の複素平面全体に解析接続して新しい関数 $g(z)$ を定義しなさい。

[解答] $|z| < a$ で

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \frac{1}{1 - z/a} = \frac{a}{a - z} \quad (4)$$

だから $g(z)$ を次のように定義する。

$$g(z) \equiv \frac{a}{a - z} \quad (5)$$

この関数は $|z| > a$ でも定義されていて、しかも正則で、 $|z| < a$ では $f(z)$ と一致している。