2009 年度物理数学 II 宿題 (12 月 14 日出題、12 月 21 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $M(t) = 2k^2 \exp[-3kt]$ のとき、$\dot{x}(t) + \int_0^t M(t-t')x(t')dt' = 0$ を $t = 0, x(0) = x_0$ の条件で解きなさい。

[解答] $\dot{x}(t) + \int_0^t M(t-t')x(t')dt' = 0$ の両辺をラプラス変換する。左辺 2 項目は畳み込み積分なので、

$$s\tilde{x}(s) - x_0 + \tilde{M}(s)\tilde{x}(s) = 0 \tag{1}$$

ここで、$\tilde{x}(s)$、$\tilde{M}(s)$ は $x(t)$、$M(t)$ のラプラス変換。

$\tilde{x}(s)$ について解くと、

$$\tilde{x}(s) = \frac{x_0}{s + \tilde{M}(s)} \tag{2}$$

$M(t) = 2k^2 \exp[-3kt]$ をラプラス変換すると、

$$\tilde{M}(s) = \frac{2k^2}{s + 3k} \tag{3}$$

だから (2) 式に代入すると、

$$\tilde{x}(s) = \frac{x_0}{s + 2k^2/(s + 3k)} \tag{4}$$

分母分子に $s + 3k$ をかけると

$$= \quad \frac{x_0(s + 3k)}{s(s + 3k) + 2k^2} \tag{5}$$

(5) 式は $s \to \infty, \tilde{x}(s) \to x_0/s$ だから逆変換の公式が使えて、

$$x(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{x_0(z + 3k)}{z(z + 3k) + 2k^2} \exp[zt]dz \tag{6}$$

ここで、積分路 Γ は被積分関数の極を全て含むように実軸上に中心を取った、半径 R の半円を表す。被積分関数の分母は

$$z(z + 3k) + 2k^2 = z^2 + 3kz + 2k^2 = (z + k)(z + 2k) \tag{7}$$

と因数分解できるから、留数定理より、$f(z) = \tilde{x}(s)\exp[zt]$ として、

$$x(t) = \mathrm{Res}[-k; f] + \mathrm{Res}[-2k; f] \tag{8}$$

留数はそれぞれ以下のように計算できる。

$$\mathrm{Res}[-k; f] = \lim_{z \to -k} (z+k)\tilde{x}(s)\exp[zt] \tag{9}$$

$\tilde{x}(s)$ を代入して

$$= \lim_{z \to -k} (z+k)\frac{x_0(s+3k)}{(z+k)(z+2k)}\exp[zt] \tag{10}$$

$$= 2x_0 \exp[-kt] \tag{11}$$

同様に計算すると、

$$\mathrm{Res}[-2k; f] = -x_0 \exp[-2kt] \tag{12}$$

したがって、

$$x(t) = 2x_0 \exp[-kt] - x_0 \exp[-2kt] \tag{13}$$

[問題 2.] 問題訂正: 赤字を追加[*1] $x(t) = (1/2\pi i)\int_C \tilde{x}(z)\exp[zt]dz$ を $\tilde{y}(s) = \int_0^\infty x(t)\exp[-st]dt$ に代入して、$\tilde{y}(s) = \tilde{x}(s)$ を示せ。ただし、C より右は $\tilde{x}(z)$ は正則。また、$|s| \to \infty$ で $|\tilde{x}(s)| \to |s|^{-k} (k > 0)$ また、C 上の z の実部は s より小さいとする。

[解答] $x(t) = (1/2\pi i)\int_C \tilde{x}(z)\exp[zt]dz$ を $\tilde{y}(s) = \int_0^\infty x(t)\exp[-st]dt$ に代入すると、

$$\tilde{y}(s) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_C \tilde{x}(z)\exp[zt]dz\exp[-st]dt \tag{14}$$

t についての積分は実行できて

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \tilde{x}(z)\frac{1}{s-z}dz \tag{15}$$

[*1] 2 カ所も間違えました。謹んで御詫びして訂正致します。

$|s| \to \infty$ で $|\tilde{x}(s)| \to |s|^{-k}(k > 0)$ から積分路を C から Γ に置き換えられる。ただし、Γ は C の直線と実軸の交点を中心にした半径 R の中心で、右側に円弧が来るように取る。

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \tilde{x}(z) \frac{1}{s-z} dz \tag{16}$$

Γ の内部では $\tilde{x}(z)$ は正則だから、コーシーの積分公式より、$\tilde{y}(s) = \tilde{x}(s)$ が示せる。