2009 年度物理数学 II 宿題 (1 月 18 日出題、1 月 25 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] ①$\lim_{L\to\infty}\int_0^Y \exp[-(L+iy)^2/2\sigma^2]dy \to 0$ を示せ。
② ①を使って $f(x)=\exp[-x^2/2\sigma^2+irx]$ をフーリエ変換しなさい。

[解答] ① $f(y)$ を複素数とすると、$|\int_0^Y f(y)dy| \le \int_0^Y |f(y)|dy$ という公式を使って、

$$|\int_0^Y \exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L+iy)^2]dy| \le \int_0^Y |\exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L+iy)^2]|dy \tag{1}$$

被積分関数は、

$$\exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L+iy)^2] = \exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L^2+2iyL-y^2)] \tag{2}$$

$$= \exp[\frac{-1}{2\sigma^2}L^2]\exp[\frac{-1}{2\sigma^2}2iyL]\exp[\frac{1}{2\sigma^2}y^2] \tag{3}$$

$|ABC|=|A||B||C|$ で、$|\exp[(-1/2\sigma^2)2iyL]|=1$ だから、

$$|\exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L+iy)^2]| = \exp[\frac{-1}{2\sigma^2}L^2]\exp[\frac{1}{2\sigma^2}y^2] \tag{4}$$

したがって、

$$\int_0^Y |\exp[\frac{-1}{2\sigma^2}(L+iy)^2]|dy = \exp[\frac{-1}{2\sigma^2}L^2]\int_0^Y \exp[\frac{1}{2\sigma^2}y^2]dy \tag{5}$$

$$\xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{6}$$

つまり、挟み撃ちで①が示せた、

②

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}+irx]\exp[-ikx]dx \tag{7}$$

として被積分関数を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}+irx]\exp[-ikx] \\
&=\exp[-\frac{x^2}{2\sigma^2}+irx-ikx] && (8)\\
&=\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\{x^2-2\sigma^2(irx-ikx)\}] && (9)\\
&=\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\{x^2-2\sigma^2 ix(r-k)\}] && (10)\\
&=\exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\{x-\sigma^2 i(r-k)\}^2+\sigma^4(r-k)^2\right]] && (11)
\end{aligned}$$

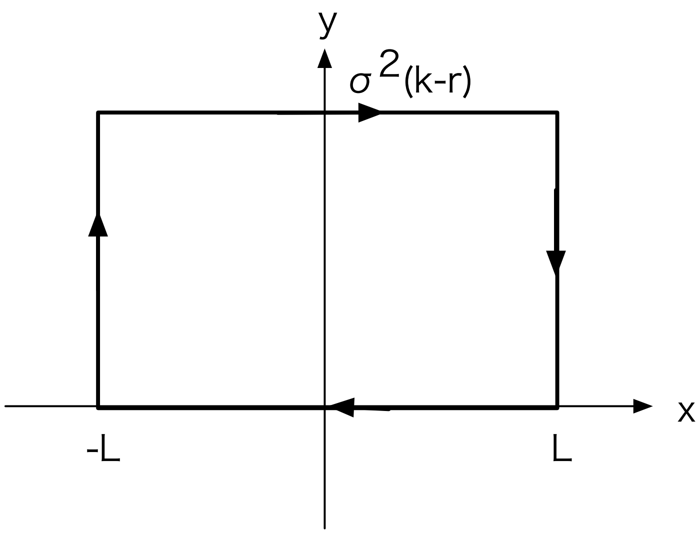
$z=x-\sigma^2 i(r-k)$ として、積分変数を x から z に変数変換すると、

$$\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_C \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}\left[z^2+\sigma^4(r-k)^2\right]]dz \tag{12}$$

ここで、積分路 C は実軸に平衡で虚軸に $y=\sigma^2(k-r)$ で交わる直線で、左から右向きを持つ。

(12) 式を計算するために次の積分路 C'(下図) の積分を考える。

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C'} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}z^2]dz \tag{13}$$



授業で説明したようにコーシーの積分定理から $I = 0$ が言え、①から $L \to \infty$ で両側の積分路は 0 になり、結局

$$\int_C \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} z^2] dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} x^2] dx = \sqrt{2\pi}\sigma \tag{14}$$

(12) 式は、

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}\sigma \exp[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sigma^4 (r-k)^2\right]] \tag{15}$$

$$= \sigma \exp[-\frac{1}{2} \left[\sigma^2 (r-k)^2\right]] \tag{16}$$

[問題 2.] $f(x) = \exp[-rx^2]$ をフーリエ変換して $r \to 0$ として $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[ikx]dx = 2\pi\delta(k)$ を示しなさい。

[解答] $f(x)$ のフーリエ変換は、問題 1. で $1/(2\sigma^2) = r$、$r = 0$ にすれば良いので、

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2r}} \exp[-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2r} k^2\right]] = \frac{1}{\sqrt{2r}} \exp[-\frac{1}{4r} k^2] \tag{17}$$

$\tilde{f}(k)$ の定義から、

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-rx^2] \exp[-ikx] dx = \frac{1}{\sqrt{2r}} \exp[-\frac{1}{4r} k^2] \tag{18}$$

両辺 $\sqrt{2\pi}$ して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-rx^2] \exp[-ikx] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \exp[-\frac{1}{4r} k^2] \tag{19}$$

$r \to 0$ にすると、左辺は

$$\lim_{r \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-rx^2] \exp[-ikx] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-ikx] dx \tag{20}$$

x を $-x$ に変数変換すると、

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ikx] dx \tag{21}$$

右辺は、$k \neq 0$ は $r \to 0$ で指数関数のかたが発散するので、0 になる。$k = 0$ の場合は、$1/\sqrt{r} \to \infty$ だから発散する。つまり、デルタ関数 $\delta(k)$ の定義から

$$\lim_{r \to 0} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \exp[-\frac{1}{4r}k^2] = C\delta(k) \tag{22}$$

C は、デルタ関数の性質

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi r}} \exp[-\frac{1}{4r}k^2] = \delta(k) \tag{23}$$

から 2π になることが分る。