2006 年度 統計力学 II 期末試験問題

2006 年 7 月 26 日 (水) 制限時間 90 分 担当 吉森 明

問題用紙 3 枚、解答用紙 2 枚（裏を使っても良い)。解答用紙が足りないときは、申し出れば 3 枚以上使える。解答用紙の 1 枚目に何枚使ったかを書くこと。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書き、問題番号をはっきり書きなさい。

すべての問題で、$\hbar$ は、プランク定数を $2\pi$ で割ったもの、$k_{\mathrm{B}}$ は、ボルツマン定数を表す。また、1 粒子の状態は密に詰まっている。

解答は、式変形の途中も書くこと。特に指示がなければ、答えは問題で与えられている変数のみで表しなさい。なお、公式が最後に与えられているので、参考にしなさい。

1. 3 次元内の立方体に閉じ込められた理想気体を考える。体積は $V$、粒子数は $N$ で、粒子の質量を $m$ とすると、$\epsilon > 0$ の状態密度 $D(\epsilon)$ は、

$$D(\epsilon) = \frac{gV}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2} = D_0 V \epsilon^{1/2}, \tag{1}$$

で与えられる。ここで、$g$ は内部状態の数を表す。

(a) 理想気体がフェルミ粒子の時、フェルミエネルギー $\epsilon_F$ を、$V, N, D_0$ で表しなさい。

(b) 理想気体がボース粒子の時、温度を $T$ に保ったまま、体積 $V$ を減らしていくと、ある体積 $V_B$ でボース-アインシュタイン凝縮が起こった。$V_B$ を求めなさい。また、$V < V_B$ の時のエネルギー $E$ を求めなさい。ただし、

$$\tilde{\zeta}(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{e^x - 1}dx \tag{2}$$

で定義される $\tilde{\zeta}(y)$ を使いなさい。$y$ には適当な数を入れること。

2. $N$ 個の水素分子 ($\mathrm{H_2}$) でできた理想気体を考える。重心の自由度はマクスウェル-ボルツマン統計に従う一方で、水素原子はスピン 1/2 のフェルミ粒子として扱わなければならない。また、1 つの水素分子は剛体回転子とし、$I$ を分子の慣性モーメントとすると、回転運動のエネルギー準位は、

$$\epsilon_J = \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1) \qquad (J = 0, 1, 2, \dots) \tag{3}$$

で与えられ、その縮退度は $2J+1$ と書ける。$N$ 個の気体全体の分配関数を $Z_N$、1 個の分子の分配関数を $Z_1$、$Z_1$ に対する重心の寄与を $Z_G$、回転運動とスピンの寄与を $Z_{rn}$ としたとき、次の問いに答えよ。

(a) 気体全体の内部エネルギー $E$ が

$$E = E_G + E_{\mathrm{r}n} \tag{4}$$

と書ける事を示しなさい。ここで、$E_G$ は重心の寄与を、$E_{\mathrm{r}n}$ は、回転運動とスピンの寄与を表す。

(b) 温度 $T$ が充分低い時、気体全体の比熱に対する回転運動とスピンの寄与 $C_{\mathrm{rn}}$ が、

$$C_{\mathrm{rn}} = ANk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^{B}\exp[-C\Theta/T] \tag{5}$$

の形に書けることを示し、$A, B, C$ を求めなさい。ただし、

$$\Theta = \frac{\hbar^2}{2Ik_{\mathrm{B}}} \tag{6}$$

で、$A, B, C$ は文字を含まない実数を表す。また、$x$ が充分小さいとき

$$\ln(1+x) \approx x \tag{7}$$

となることを使いなさい。

3. ハミルトニアン

$$H = -\sum_{\langle i,j\rangle} J\sigma_i\sigma_j \tag{8}$$

で表される格子の上に並んだスピン系がある ($J > 0$)。和は、最近接対格子点についてとる。各格子点にあるスピンは、$\sigma_i = -3, -1, 1, 3$ の 4 つの状態をとるものとする。カノニカル分布に対する平均場近似を使って、以下の問いに答えなさい。

(a) $\sigma_i$ の平均値は $i$ によらないので、$\langle\sigma\rangle$ と書くことにする。温度 $T$ の時の $\langle\sigma\rangle$ に対する平均場近似の式を $\langle\sigma\rangle = f(\langle\sigma\rangle)$ の形で導きなさい。最近接格子点の数は $z$ とする。ここで、$f(\langle\sigma\rangle)$ は、$\langle\sigma\rangle$ のある関数を表す。

(b) (a) で求めた平均場近似の式を $g(\langle\sigma\rangle) \equiv \langle\sigma\rangle - f\langle\sigma\rangle = 0$ と書いて、$g(\langle\sigma\rangle)$ を $\langle\sigma\rangle^3$ まで展開すると、

$$g(\langle\sigma\rangle) = A_1\langle\sigma\rangle + A_3\langle\sigma\rangle^3 \tag{9}$$

が得られる。$\beta \equiv 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ を使うと、$A_3 = 17(\beta Jz)^3/3$、$A_1 = 1 - a\beta Jz$ となることがわかる。$a$ を求めなさい。

(c) 平均場近似の式が (9) 式で近似できる範囲で相転移温度 $T_c$ を $a, J, z, k_{\mathrm{B}}$ で表しなさい。

　必要なら次の公式を使っても良い。

① 多粒子系のグランドカノニカル分布で、

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_{\mathrm{B}}T} \pm 1} \tag{10}$$

複号は、上のほうがフェルミ-ディラック統計、下のほうがボース-アインシュタイン統計を表す。

② 分配関数を $Z$ とすると、

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \tag{11}$$

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_{VN} \tag{12}$$