

§2. ブラウン運動の基礎

2-1. ランジュバン方程式

目標 ランジュバン方程式を理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 不規則な運動は予想できないことと関係している。
- 微粒子の運動はランジュバン方程式でモデル化できる。
- ランダム力は測定毎に分布する。
- ランダム力の時間相関がないことが不規則性の要因
- ランジュバン方程式は微粒子だけでなく、いろいろな不規則な現象に使える。

- 目次 (1) 微粒子の運動
(2) ランダム力
(3) ランジュバン方程式
(4) 具体例
(5) まとめ

仮定 次の式をランジュバン方程式と呼ぶ。

$$\text{線形: } \dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \quad (1)$$

$$\text{非線形: } \dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \quad (2)$$

ただし、

$$\langle R(t) \rangle = 0 \quad (3)$$

$$\langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t-t') \quad (4)$$

を満たす。さらに

$$\text{線形: } \langle X(0)R(t) \rangle = 0 \quad t \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{非線形: } \langle f(X(0))R(t) \rangle = 0 \quad t \geq 0 \quad (6)$$

ここで、 $f(X)$ は X の任意関数

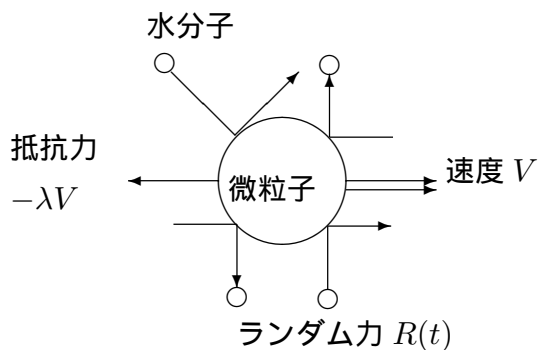
結論 ランジュバン方程式は、不規則な運動を記述するモデルとして有効。

(1) 微粒子の運動

wwwにあるブラウン運動のページ (<http://www.geocities.co.jp/Hollywood/5174/s2f.html>)。

粘性抵抗と温度を選んで開始ボタンを押すと粒子が動き出す。軌跡も書ける (下図参照)。

1908年、ランジュンバンは、ブラウン運動を表す数式をつくった。



微粒子は、水分子から力を受ける。

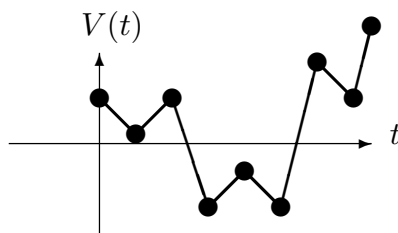
1. 止まっても受ける力 (ランダム力): $R(t)$
2. 動きを止めようとする力 (抵抗力): $-\lambda V(t)$

運動方程式は、

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \quad (7)$$

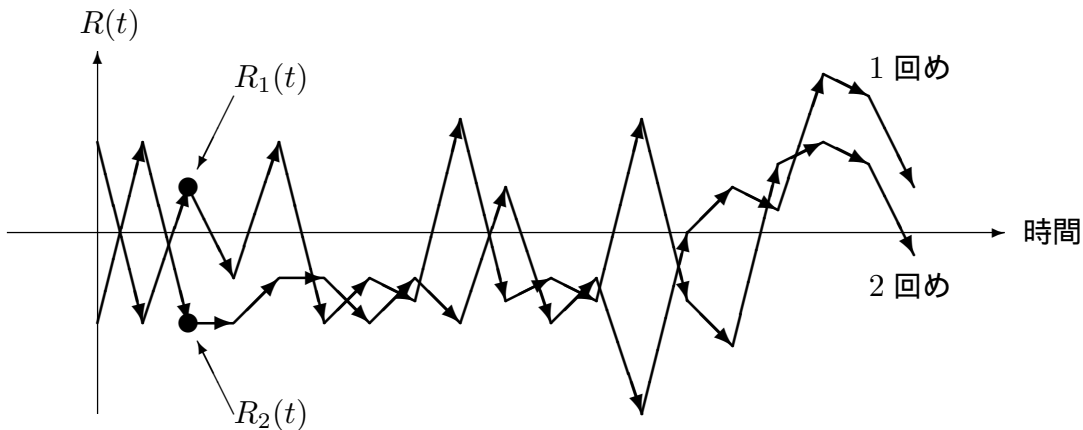
(2) ランダム力

1次元では



不規則 → 測る度 (リセットする度) になる

ランジュンバン方程式では、この $V(t)$ の性質をランダム力で実現。



1 回めと 2 回めで違う。測る度に別の $R(t)$ が得られる。

$$\{R_i(t)\} = \{R_1(t), R_2(t), R_3(t), \dots\} \quad : R(t) \text{ の集合} \quad (8)$$

全ての要素 $R_1(t), R_2(t), R_3(t), \dots$ は、時刻が同じで、測定の番号だけが違うことに注意。

時刻が同じでもたくさんの $R(t)$

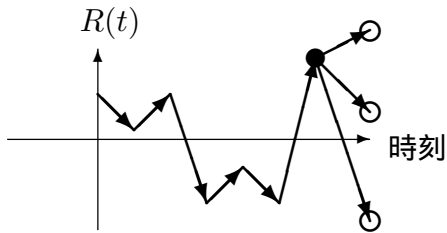
→ $R(t)$ が分布

ランダム力に相関がないことについて

不規則な運動は、ランダム力に時間がないことと深い関係がある。もし、 $R(t)$ が予測できるとブラウン粒子の動きを予想できる。だから、

不規則な運動 → $R(t)$ が予想できない。

[別の時刻との相関と予想できることとの関係:(§3-1 参照)]



次の時刻はどこへ?

もし、 $\langle R(t)R(0) \rangle = 0, t > 0$ ならば、現在の $R(t)$ と無関係に、次の時刻の値が決まる。つまり、予想できない。

宿題:

- 2 (20 点) 微粒子の 1 次元ブラウン運動が次のランジュバン方程式で表されるとする。

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \quad (9)$$

ただし、 $V(t)$ は微粒子の速度、 m は質量で、 $R(t)$ はランダム力を表し、(3)、(4)、(5) 式の条件を満たす。 $t = 0$ で、 $V(0) = 0, X(0) = 0$ が分かっている場合に、 $\langle V(t)^2 \rangle$ と $\langle X(t)^2 \rangle$ を求めなさい。ただし、 $X(t)$ は、微粒子の位置を表し、 $\dot{X}(t) = V(t)$ とする。

- 3 (20 点) 線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \quad (10)$$

で、(3)、(4)、(5) 式の条件を満たす時、 $\langle X(t)X(t') \rangle$ を $t' > t, t' = t, t' < t$ に分けて計算しなさい。ただし、 t も t' も 0 より大きく、 $\langle X(0)^2 \rangle = D/2$ とする。