2004 年度非平衡物理学 授業ノート 3

2004.10.19 担当 吉森 明

§2-2. フォッカー・プランク (FP) 方程式

目標 フォッカー・プランク (FP) 方程式を理解する。特にランジュバン方程式との関係を知る。具体的には以下のことを分かる。

- 分布関数 $P(x,t)$ は時刻 t に X が $x \sim x+dx$ にある確率と関係し、FP 方程式は、その時間変化を表す。
- FP 方程式は下の仮定 1、2、3 を満たした時ランジュバン方程式から導ける。
- FP 方程式の導出のポイント: $f(x)$ を任意関数とすると、$\langle f(X(t)) \rangle$ の t に関するテーラー展開で 1 次のオーダーまでに $f(x)$ の **2 階微分**が含まれる。
- 下の仮定を満たす時、FP 方程式はランジュバン方程式と等価になるので、ランジュバン方程式が使えた現象は FP 方程式も応用できる。

目次 (1) FP 方程式

(2) ランジュバン方程式からの導出

(3) FP 方程式とランジュバン方程式が等価である条件

(4) 具体例

((5) FP 方程式とランジュバン方程式の違い)

仮定
1. $X(t)$ と $R(t')$ が $t < t'$ で統計的に独立。
2. $\langle R(t) \rangle = 0$ $\langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t-t')$
3. $R(t)$ がガウス過程。
4. (余分) 考えている領域は無限で、$P(x,t)$ を分布関数とすると、
   $x \to \pm\infty$ で、$P(x,t) \to 0, \partial P(x,t)/\partial x \to 0$

結論 ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{1}$$

と FP 方程式

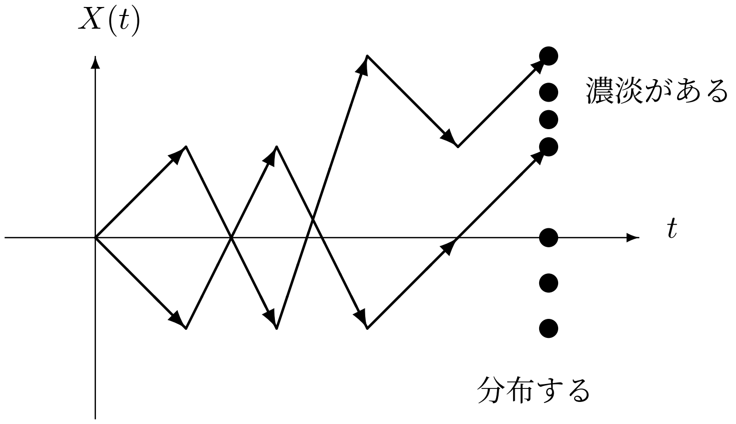
$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \{-\frac{\partial}{\partial x}F(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{D}{2}\}P(x,t) \tag{2}$$

は、等価。

参考文献: 宗像豊哲著「物理統計学」朝倉書店

(1) FP 方程式

$X(t)$ は確率過程なので、$X(0)$ が同じでも $X(t)$ は分布する。



分布関数 $P(x,t)$:
時刻 t に X が $x\sim x+dx$
にある確率 $= P(x,t)dx$

宿題:

4 (20 点) 講義では不規則な運動として、次の 2 点の性質を挙げた。

(a) 軌道がガタガタしている。(いたるところ微分不能)

(b) 同じ初期条件から始めても違う運動。つまり予測できない。

今、2 次元上の粒子の運動を考える。軌道がガタガタしていても、毎回まったく同じ軌道を描き、ただし、速度が毎回違う運動は、上の 2 つの性質を満たす。しかし、この運動は規則的な感じがしてしまう[*1]。この不都合を解消するよう、不規則な運動の妥当な定義を考えなさい。

5 (5 点) 線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{3}$$

で、$\langle X(0)R(t)\rangle = 0, t > 0$ の時、$\langle X(t)R(t')\rangle$ を $t' > t, t' = t, t' < t$ に分けて計算しなさい。ただし、t も t' も 0 より大きく、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ とする。

6 (10 点) 宿題 2 で、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ のかわりに、

$$\langle R(t)R(t')\rangle = \begin{cases} D & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases} \tag{4}$$

とすると、答えはどうなるか考えなさい。ただし、後の条件はまったく同じとする。

[*1] これは、2003 年度の受講生永末勇治さんの指摘です。

7 (20 点) 授業で扱った例以外に、ランジュバン方程式で記述できる現象を一つ以上探し、**ランジュバン方程式を書いて説明しなさい**。その場合のランダム力の実態は何か。

8 (5 点) $X(t)$ を不規則に時間変化するある物理量、$\dot{X}(t)$ をその時間微分とすると、

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle X(t) \rangle \tag{5}$$

を示しなさい。ただし、i 番目の測定で得られた $X(t)$ を $X_i(t)$ として、$\langle X(t) \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_i^N X_i(t)/N$、$\langle \dot{X}(t) \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_i^N \dot{X}_i(t)/N$ とする。

9 (10 点) $\langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t-t')$ を満たすランダム力 $R(t)$ について、

$$\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} R(t')dt' \tag{6}$$

とした時、

$$\langle \Delta W^2 \rangle = D\Delta t \tag{7}$$

となる事を示しなさい。

10 (20 点) 伊藤積分について調べてレポートにしなさい。定義と性質は何か。