2004 年度非平衡物理学 授業ノート 4

2004.11.2 担当 吉森 明

お知らせ: 授業のホームページをつくりました。

http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/hhk04.html

授業で配るプリントをあらかじめ pdf ファイルでおいておきます。また、連絡や反省も載せますので、ご覧ください。

2-2. フォッカー・プランク (FP) 方程式

(2) ランジュバン方程式からの導出

③平均値の方程式

$f(x)$ を任意関数にして、$f(X(t+\Delta t))$ をテーラー展開する。ここで、

$$\Delta X(t) = F(X(t))\Delta t + \Delta W \tag{1}$$

ただし、$\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$ だから、まず $\Delta X(t)$ について展開する。

$$f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) + \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t)^2 + \dots \tag{2}$$

(1) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) &+ \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \\ &+ \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 + \Delta X \text{ の 3 次以上の項} \end{aligned} \tag{3}$$

両辺の平均を考える。

$$\begin{aligned} \langle f(X(t+\Delta t))\rangle = \langle f(X(t))\rangle &+ \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle + \langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項} \rangle \end{aligned} \tag{4}$$

右辺の 2 項目は、

$$\left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle = \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle \tag{5}$$

(5) 式の右辺 2 項目を**仮定 1** を使って計算する。

仮定 1 $X(t)$ と $R(t')$ が $t < t'$ で統計的に独立。

ΔW の時間は、t より後なので、この仮定から別々に平均することが出来る。

$$\left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle = \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \right\rangle \langle \Delta W \rangle = 0 \tag{6}$$

(4) 式の右辺 3 項目は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))^2 \Delta t^2 + 2F(X(t))\Delta t \Delta W + \Delta W^2\} \right\rangle \qquad (7)\\
&= \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} F(X(t))^2 \Delta t^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t \Delta W \right\rangle \\
&\qquad + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle \qquad (8)
\end{aligned}$$

(8) 式の 2 項目は、また**仮定 1** を使って、

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t \Delta W \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t \right\rangle \langle \Delta W \rangle = 0 \tag{9}$$

3 項目も同様に

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle \left\langle \Delta W^2 \right\rangle \tag{10}$$

$\left\langle \Delta W^2 \right\rangle$ は、前回やった通りに**仮定 2** を使って計算できる。

仮定 2 $\langle R(t) \rangle = 0,\ \langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t-t') \Longleftrightarrow \langle \Delta W \rangle = 0, \left\langle \Delta W^2 \right\rangle = D\Delta t$

したがって、

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t \tag{11}$$

結局

$$\begin{aligned}
\langle f(X(t+\Delta t)) \rangle = \langle f(X(t)) \rangle &+ \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} F(X(t))^2 \Delta t^2 \right\rangle \\
&+ \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t + \langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \qquad (12)
\end{aligned}$$

ここで、**仮定 3** を使う。

仮定 3 $R(t)$ がガウス過程 $\Longleftrightarrow \langle \Delta W$ の 3 次以上の項 $\rangle \propto \Delta t^2$以上

ΔX の 3 次の項は、$\Delta t^k \Delta W^{n-k}, n \geq 3, k \geq n$ に比例するので、**仮定 3** から、

$$\langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \propto \Delta t^2\text{以上} \tag{13}$$

となる。したがって、

$$\frac{d}{dd} \langle f(X(t)) \rangle \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(X(t+\Delta t)) - f(X(t))}{\Delta t} \tag{14}$$

$$= \left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle + \frac{D}{2} \left\langle \frac{d^2 f}{dX^2} \right\rangle \tag{15}$$

$f = f(X)$ の微分は、微分した後に $X = X(t)$ を代入する。(15) 式は、任意関数 $f(X)$ の**平均値の方程式**を表している。

④ FP 方程式

平均値は、分布関数を使い、

$$\langle f(X(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P(x,t) dx \tag{16}$$

と表せる。したがって、

$$\frac{d}{dt} \langle f(X(t)) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} dx \tag{17}$$

また、(15) 式の右辺も分布関数で表せて、1 項目は、

$$\left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} F(x) P(x,t) dx \tag{18}$$

だから、部分積分すると、

$$\left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle = [f(x)F(x)P(x,t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \{F(x)P(x,t)\} dx \tag{19}$$

仮定 4 から、

$$\left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial}{\partial x} \{F(x)P(x,t)\} dx \tag{20}$$

(15) 式の 2 項目は、

$$\frac{D}{2}\left\langle \frac{d^2 f}{dX^2} \right\rangle = \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f}{dx^2} P(x,t)dx \tag{21}$$

これも部分積分すると、

$$= \frac{D}{2}\left[\frac{df}{dx}P(x,t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)dx \tag{22}$$

仮定 4 から、

$$= -\frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)dx \tag{23}$$

もう 1 度部分積分

$$= -\frac{D}{2}\left[f\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{24}$$

仮定 4

$$= \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{25}$$

結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\}dx + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{26}$$

これが、任意の $f(x)$ で成り立つためには、

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{27}$$

これは、FP 方程式。

宿題:

11 (5 点) 複数の確率変数 $\Delta W_i, i = 1, \ldots,$ があって、互いに独立、すなわち $\langle \Delta W_i \Delta W j\rangle = d\delta_{ij}$ の時、

$$\delta W_k \equiv \sum_{i=nk}^{n(k+1)-1} \Delta W_i \tag{28}$$

で定義される δW_k について、$\langle \delta W_k \delta W_l \rangle = nd\delta_{kl}$ を示しなさい。

12 (20 点) 授業では、考える範囲を $-\infty$ から ∞ とした。これを 0 から L までにして周期境界条件 $P(x,t) = P(x+L,t)$ を考える。$f(x) = x$ とした時、平均値の方程式 (15) 式から FP 方程式 (27) が導けるか答えなさい。もし、導けない時は、その物理的な理由を論じなさい。