2004年度非平衡物理学 授業ノート 7

2004.11.30 担当 吉森 明

§3-2. Wiener-Khinchin の定理

目標 Wiener-Khinchin の定理を理解する。具体的に以下のことを分かる。

- 時系列のフーリエ変換は時間相関関数と関係がつく (結論参照)。
- 有限時間の定理については、時間相関関数は、時間平均で定義されている。
- 相関関数が指数関数の時は、I_ω はローレンツ型。

目次 (1) 時系列のフーリエ変換

(2) 無限時間の場合

(3) 有限時間の場合

(4) 具体例

(5) 定理の物理的な意味

仮定 1. 定常過程。

2. (3) については、時間相関関数を時間平均で定義。

$$\langle X(t)X(t')\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t'+\tau)d\tau \tag{1}$$

3. さらに、次の量を定義する。

$$X_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{i\omega t}dt \tag{2}$$

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X_\omega(T)^* X_\omega(T) \tag{3}$$

ただし、

$$X_\omega(T) = \int_0^T X(t)e^{i\omega t}dt \tag{4}$$

結論 1. 無限時間の場合 $\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')\tilde{\psi}(\omega)$

2. 有限時間の場合 $I_\omega = \tilde{\psi}(\omega)$

ここで、

$$\tilde{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\psi(t)dt \tag{5}$$

(2) 無限時間の場合

(2) 式を使って

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} \langle X(t) X(t') \rangle \tag{6}$$

定常 (仮定 1) から、$\langle X(t)X(t')\rangle = \psi(t-t')$。だから、

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} \psi(t-t') \tag{7}$$

一般に、$f(t,t') = g(t-t')$ となる関数を t と t' の両方でフーリエ変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} f(t,t') = 2\pi\delta(\omega+\omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} g(s) ds \tag{8}$$

となる事が知られている (宿題 27 参照) ので、

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} \psi(s) ds \tag{9}$$

(5) 式を使うと、

$$\boxed{\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega') \tilde{\psi}(\omega)} \tag{10}$$

これは、$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle$ は、$\omega' = -\omega$ の時だけ値があり、**時間相関関数のフーリエ変換に比例する**ことを表している。

(3) 有限時間の場合

実際は有限の時間しか測れないので、

$$X_\omega(T) = \int_0^T X(t) e^{i\omega t} dt \tag{11}$$

ここで、以下の様に**スペクトル密度 (パワースペクトル、スペクトル強度)** を定義する。

$$\boxed{I_\omega \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_\omega(T)^* X_\omega(T)} \tag{12}$$

この極限は、以下でみるように、時間相関関数のフーリエ変換があれば、存在する。また、**1 つの軌道で計算できる**。

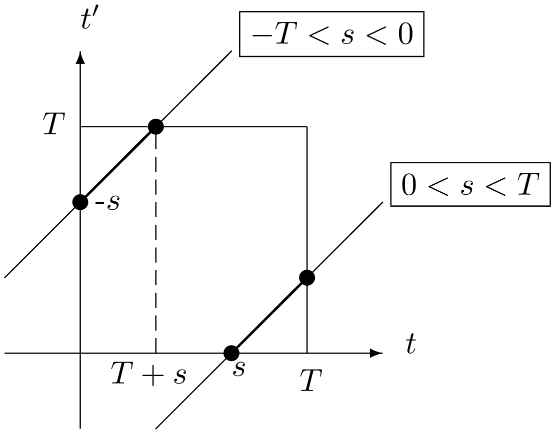
この定義に (11) 式を代入する。

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt' e^{-i\omega t'} \int_0^T dt e^{i\omega t} X(t) X(t') \tag{13}$$

2 つの積分変数 (t, t') を (s, t) に変数変換する。ただし、$s = t - t'$ とする。ヤコビアンは

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t'} \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{t} - \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)_{t'} \left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_{t} = 1 \times 0 - 1 \times (-1) = 1 \tag{14}$$

積分の順序は、まず s を固定し t で積分し、その後で s を積分する。その時積分範囲は、下の図のようになる。



- **t の積分範囲は、s によって変る。**

  t を先に積分するということは、
  s を固定して t で積分
  ↓
  左図で斜線を 1 本固定して斜線の上を積分

積分するのは四角の中だけ	⟶	t の積分範囲は黒丸の間

  この範囲は s がどこにあるかによって変る。

つまり、

$$-T < s < 0 \text{ の時は} \quad {\color{red}0} < t < T + s \tag{15}$$

$$0 < s < T \text{ の時は} \quad s < t < T \tag{16}$$

結局 t の積分範囲は、s の値によって変るので、**s の積分を 2 つに分けなければならない。**

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\{\int_0^T ds\ e^{i\omega s} \int_s^T X(t)X(t-s)dt + \int_{-T}^0 ds\ e^{i\omega s} \int_0^{T+s} X(t)X(t-s)dt\} \tag{17}$$

1 項目は、t を $\tau = t - s$ に変数変換すると、

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\{\int_0^T ds\ e^{i\omega s} \int_0^{T-s} X(\tau+s)X(\tau)d\tau + \int_{-T}^0 ds\ e^{i\omega s} \int_0^{T+s} X(t)X(t-s)dt\} \tag{18}$$

$\psi(t)$ に**時間平均の定義 (仮定 2)(1) 式を使うと**、(18) 式の 1 項目と 2 項目の s の被積分関数は、$T \to \infty$ で、それぞれ $\psi(s)$ と $\psi(-s)$ となる。従って、

$$I_\omega = \int_0^\infty ds\ e^{i\omega s}\psi(s) + \int_{-\infty}^0 ds\ e^{i\omega s}\psi(-s) = \int_{-\infty}^\infty ds\ e^{i\omega s}\psi(s) = \tilde{\psi}(\omega) \tag{19}$$

ここで、$\psi(-s) = \psi(s)$ を使った。

宿題の訂正: 問題 23 は不等号が逆でした。毎回訂正で済みません。

23(10 **点**)　誤: $|\psi(t)| \geq \psi(0)$ $\longrightarrow$ 正: $|\psi(t)| \leq \psi(0)$

宿題:

25 (30 点) $X(t)$ が以下の線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{20}$$

に従う時、授業で説明したように相関関数は、$\psi(t) = \langle X(t)X(0)\rangle = \langle X^2\rangle e^{-\gamma t}$ となる。これは、相関関数の性質 $\dot{\psi}(0) = 0$ を満たさないように見える。なぜか説明しなさい。ただし、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ として、$D = 2\gamma\langle X^2\rangle$ とすれば、$X(t)$ は定常過程であると示せる。

26 (20 点) ある時間変動する変数について、「全ての周期が独立に同じ確率で含まれる」という場合と、「全ての周期が含まれる」という場合の違いを論じなさい。最後の方は、デルタ関数になるのに対し、最初の方は、授業ノート 6 の 2 ページにある液体 A のような時間変化になる。

27 (5 点) (8) 式を導きなさい。

28 (20 点) ブラウン粒子をばねにつなぐことを考える。この場合もランジュバン方程式をたてることが出来て、ばね定数の伸びを $X = X(t)$ とすると、

$$m\ddot{X}(T) = -\gamma\dot{X}(t) - kX(t) + R(t) \tag{21}$$

と書ける。ここで、m は粒子の質量、$-\gamma\dot{X}(t)$ は抵抗力、k はばね定数、$R(t)$ はランダム力を表す。$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ の時、Wiener-Khinchin の定理を使って、時間相関関数 $\psi(t) = \langle X(t)X(0)\rangle$ のフーリエ変換 $\tilde{\psi}(\omega)$ を求めなさい。

29 (40 点) 確率的に揺らぐ変数 $X(t)$ を使って、$Y(t) \equiv \dot{X}(t) - \gamma X(t)$ なる変数 $Y(t)$ が定義されている。$Y(t)$ が定常過程であれば、$\langle X(t_1)X(t_2)\rangle$ が $t_1 - t_2$ だけの関数になることを Wiener-Khinchin の定理を使って示せ。ただし、$t \to \pm\infty$ で、$X(t) = 0$ とする。