2004 年度非平衡物理学 授業ノート 8

2004.12.7 担当 吉森 明

§3-3. 時間遅れの応答

目標 線形応答の一般的な式と物理を理解する。ランジュバン方程式との関係を理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 応答が外場に比例する場合 (線形応答)、過去の外場が影響することがある (時間遅れの応答)。
- 線形応答は、線形ランジュバン方程式から計算できる。
- 線形応答はいろいろな現象にみられる。
- 緩和と時間遅れの応答は密接に関係している。

目次 (1) はじめに

(2) 時間遅れ

(3) 線形ランジュバン方程式による例

(4) まとめと注意

仮定

1. **外場が充分弱い。**
2. $f(t) = 0$ の時、定常。
3. 未来の時刻の外場は、現在の応答に影響しない。(因果律)

結論 時間おくれの線形応答は一般的に次の式で書ける。

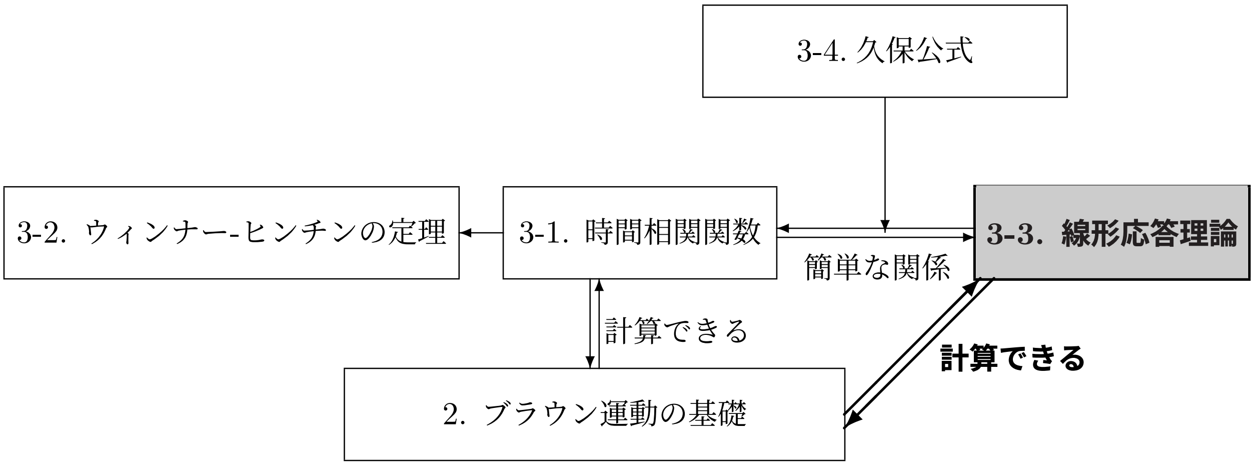
$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{1}$$

特に $X(t)$ が線形ランジュバン方程式 $\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t)$ にしたがう場合、$x(t) = \langle X(t)\rangle$ とすると、

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t} \tag{2}$$

(1) はじめに

流れ



(3) 線形ランジュバン方程式による例

○ 線形ランジュバン方程式に外場 $f(t)$ を加える。

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t) \tag{3}$$

$\boxed{x(t) = \langle X(t) \rangle}$ と考える。両辺平均をとると、$\langle R(t) \rangle = 0$ だから、

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = -\gamma \langle X(t) \rangle + f(t) \tag{4}$$

$\langle \dot{X}(t) \rangle = d\langle X(t) \rangle / dt = \dot{x}(t)$ だから、

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + f(t) \tag{5}$$

(5) 式は係数変化法で解くことが出来る。まず、$f(t) = 0$ の方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma x(t)$ を考えて、この方程式を解くと、

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \tag{6}$$

C は、時間によらない定数だが、本当に解きたいのは、(5) 式だから、$C = C(t)$ としてみる。$x(t) = C(t)\exp[-\gamma t]$ を (5) 式に代入すると、$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\exp[-\gamma t] - \gamma C(t)\exp[-\gamma t]$ だから、

$$\dot{C}(t)e^{-\gamma t} = f(t) \tag{7}$$

$$\dot{C}(t) = f(t)e^{\gamma t} \tag{8}$$

$$C(t) = \int^t f(t')e^{\gamma t'} dt' \tag{9}$$

積分は不定積分で、これから

$$x(t) = e^{-\gamma t} \int^t f(t') e^{\gamma t'} dt' \tag{10}$$

(10) 式は、特殊解で一般解は

$$x(t) = Ae^{-\gamma(t-t_0)} + \int^t e^{-\gamma(t-t')} f(t') dt' \tag{11}$$

A は、初期条件から決まる定数で、$t = t_0$ のとき $x = x(t_0)$ とすると、

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')} f(t') dt' \tag{12}$$

$x(t_0) = 0$ を仮定して、$t_0 \to -\infty$ とする。

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')} f(t') dt' \tag{13}$$

つまり、$\alpha(t) = \exp[-\gamma t]$

宿題:

30 (5 点) 時間相関関数が $\psi(t) = \langle X^2 \rangle e^{-\gamma|t|}$ の時、そのフーリエ変換 $\tilde{\psi}(\omega)$ が

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{2\langle X^2 \rangle \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{14}$$

のローレンツ型になることを示しなさい。

31 (20 点) フェイゾンフリップ: 長距離秩序があるが、結晶ではない固体を準結晶という。準結晶の 1 次元のモデルとして、2 種類の原子間隔 L と S をある決まったルールで並べたものを考える。ところが、原子は完全には静止していないので、時々動き、原子間隔が L から S へ、あるいは、S から L へ変る。この変化をフェイゾンフリップと呼ぶ。今、i 番目の原子と $i+1$ 番目の原子の間の距離を $X_i(t)$ とすると、$X_i(t)$ は、不規則に変動する。

$$\psi_{ij}(t) \equiv \langle X_i(t) X_j(0) \rangle \tag{15}$$

として、そのフーリエ変換を $\tilde{\psi}_{ij}(\omega)$ とかく。また、今までと同様に

$$I_\omega^{ij} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_\omega^i(T)^* X_\omega^j(T) \tag{16}$$

とすると、

$$I_\omega^{ij} = \tilde{\psi}_{ij}(\omega) \tag{17}$$

となることを示しなさい。ただし、定常過程で、時間相関関数 $\psi_{ij}(t)$ は、時間平均で定義する。

32 (20 点) 問題 28 でばねでつながったブラウン粒子に外場をかけると、

$$m\ddot{X}(T) = -\gamma\dot{X}(t) - kX(t) + f(t) + R(t) \tag{18}$$

と書ける。この場合も、$x(t) = \langle X(t)\rangle$ とすれば、時間遅れの応答の式 (1) 式が成り立つことを示し、$\alpha(t)$ を求めなさい。ただし、$\langle R(t)\rangle = 0$ とする。

33 (30 点) 外場が $f(t) = \Re f_0 e^{i\omega t}$ の様に時間変化する時、t が 0 から $2\pi/\omega$ まで経った時の外場が系にした仕事

$$W = -\int_0^{\pi/\omega} x(t)\dot{f}(t)dt \tag{19}$$

を ω、α''_ω と f_0 で表しなさい。ただし、$\Re$ は実部を表し、

$$\langle X(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{20}$$

が成り立ち、α''_ω は、$\alpha(t)$ のフーリエ変換の虚部を表す。この仕事は、**パワーロス**と呼ばれる。

34 (30 点) **クラマースクローニッヒの関係式**を調べ、レポートしなさい。