2005 年度非平衡物理学 授業ノート 2

2005.10.13 担当 吉森 明

お知らせ: 授業のホームページをつくりました。

http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/hhk05.html

授業で配るプリントを pdf でおいておきます。また、連絡や反省も載せますので、ご覧ください。

§2. ブラウン運動の基礎

2-1. ランジュバン方程式

目標 ランジュバン方程式は不規則な時間変化を再現する 1 つのモデルで、ブラウン運動以外にも応用できることを理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 不規則な運動の特徴。
- ブラウン運動を表す数式を覚える。
- ランダム力についての仮定 (下記**「仮定」**参照)。
- ランジュバン方程式は微粒子だけでなく、いろいろな不規則な現象に使える。

目次 (1) ブラウン運動

(2) ブラウン運動のモデル

(3) ランジュバン方程式

(4) 具体例

(5) まとめ

仮定 次の式をランジュバン方程式と呼ぶ。

$$\text{線形：}\qquad \dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{1}$$

$$\text{非線形：}\qquad \dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{2}$$

ただし、

$$\langle R(t)\rangle = 0 \tag{3}$$

$$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t') \tag{4}$$

を満たす。さらに

$$\text{線形：}\qquad \langle X(0)R(t)\rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

$$\text{非線形：}\qquad \langle f(X(0))R(t)\rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

ここで、 $f(X)$ は X の任意関数

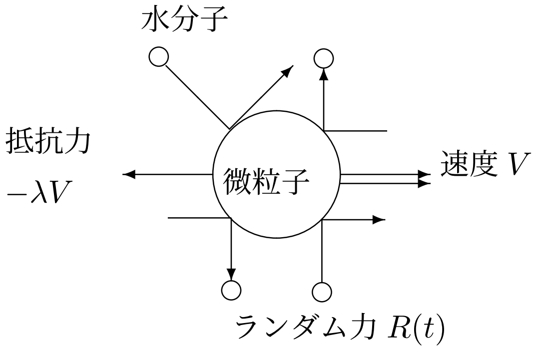
結論 ランジュバン方程式は、不規則な運動を再現する**モデルとして有効**。

(1) 微粒子の運動

www にあるブラウン運動のページ (http://www.geocities.co.jp/Hollywood/5174/indexb.html)。「4. ブラウン運動のシミュレーション」で、粘性抵抗と温度を選んで開始ボタンを押すと粒子が動き出す。軌跡も書ける。

(2) ブラウン運動のモデル

○ 1908 年、ランジュンバンは、ブラウン運動を表す数式をつくった。



微粒子は、水分子から力を受ける。

1. 止まっていても受ける力 (**ランダム力**): $R(t)$
2. 動きを止めようとする力 (抵抗力): $-\lambda V(t)$

運動方程式は、

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \tag{7}$$

○ ランダム力 $R(t)$ の分布=測る度に別の $R(t)$ が得られる。

$$\{R_i(t)\} = \{R_1(t), R_2(t), R_3(t), \ldots\} \qquad : R(t) \text{ の集合} \tag{8}$$

全ての要素 $R_1(t), R_2(t), R_3(t), \ldots$ は、**時刻が同じ**で、測定の番号だけが違うことに注意。

$\boxed{\text{時刻が同じでもたくさんの } R(t)} \longrightarrow R(t)$ が分布

平均は、その分布で行う。**時間平均では無い。**

宿題:

2 (20 点) 講義では不規則な運動として、次の 2 点の性質を挙げた。

(a) 軌道がガタガタしている。(いたるところ微分不能)

(b) 同じ初期条件から始めても違う運動。つまり予測できない。

今、2 次元上の粒子の運動を考える。軌道がガタガタしていても、毎回まったく同じ軌道を描き、ただし、速度が毎回違う運動は、上の 2 つの性質を満たす。しかし、この運動は規則的な感じがしてしまう[*1]。この不都合を解消するよう、不規則な運動の妥当な定義を考えなさい。

3 (30 点) (1) 式と (3)-(5) 式で計算される $X(t)$ が不規則な時間変化をすることを数値的に確かめよ。ただし、時刻 t を $t_i(i=1,\ldots,n)$ のように離散化し、(1) 式を

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = -\gamma X(t_i)\Delta t + W(t_i) \tag{9}$$

のように差分化しなさい。$W(t_i)$ は、それぞれの時間で独立なガウス分布 (平均 0、分散 $D\Delta t$) になるように乱数を引いて値を決めよ。適当な初期条件 $X(t_1)$ を与えて、実際に計算機で計算して、横軸 t、縦軸 $X(t)$ のグラフを書け。γ や D も適当に与えて良い。

4 (20 点) 微粒子の 1 次元ブラウン運動が次のランジュバン方程式で表されるとする。

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \tag{10}$$

ただし、$V(t)$ は微粒子の速度、m は質量で、$R(t)$ はランダム力を表し、(3)、(4)、(5) 式の条件を満たす。$t=0$ で、$V(0)=V_0$、$X(0)=0$ が分かっている場合に、$V(t)$ と $X(t)$ の平均 ($\langle V(t)\rangle$、$\langle X(0)\rangle$) と分散 ($\langle V(t)^2\rangle - \langle V(t)\rangle^2$、$\langle X(t)^2\rangle - \langle X(t)\rangle^2$) を求めなさい。ただし、$X(t)$ は、微粒子の位置を表し、$\dot{X}(t) = V(t)$ とする。

5 (5 点) 宿題 4 で、(4) 式: $\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ のかわりに、

$$\langle R(t)R(t')\rangle = \begin{cases} D & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases} \tag{11}$$

とすると、答えはどうなるか考えなさい。ただし、後の条件はまったく同じとする。

6 (5 点) 線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{12}$$

で、$\langle X(0)R(t)\rangle = 0, t > 0$ であれば、$t' > t > 0$ でも $\langle X(t)R(t')\rangle = 0$ となることを示しなさい。ただし、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ とする。

[*1] これは、2003 年度の受講生永末勇治さんの指摘です。