2005 年度非平衡物理学 授業ノート 3

2005.10.20 担当 吉森 明

2-2. フォッカー・プランク (FP) 方程式

目標 FP 方程式の導出における仮定と、ランダム力と 2 階微分の関係を理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 分布関数 $P(x,t)$ は時刻 t に X が x〜$x+dx$ にある確率と関係し、FP 方程式は、その時間変化を表す。
- $X(t)$ がランジュバン方程式を満たす時、任意関数 $f(x)$ を t でテーラー展開すると、1 次のオーダーまでに x に関する **2 階微分**が含まれる。
- FP 方程式は下の仮定 1、2、3 を満たした時ランジュバン方程式から導ける。

目次 (1) 分布関数と FP 方程式

(2) ランジュバン方程式からの導出の概要

(3) ランジュバン方程式からの導出の詳細

(4) まとめ

仮定
1. $X(t)$ と $R(t')$ が $t < t'$ で統計的に独立。
2. $\langle R(t)\rangle = 0$ $\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$
3. $R(t)$ がガウス過程。
4. (余分) 考えている領域は無限で、$P(x,t)$ を分布関数とすると、$x \to \pm\infty$ で、$P(x,t) \to 0, \partial P(x,t)/\partial x \to 0$

結論 ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{1}$$

と FP 方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \{-\frac{\partial}{\partial x}F(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{D}{2}\}P(x,t) \tag{2}$$

は、等価。

参考文献: 宗像豊哲著「物理統計学」朝倉書店

(1) 分布関数と FP 方程式

分布関数 $P(x,t)$:

時刻 t に X が x〜$x+dx$ にある確率 $= P(x,t)dx$

FP 方程式は、$P(x,t)$ の時間変化を与える式。

(2) ランジュバン方程式からの導出の概要

○ $f(x)$ を任意関数にして、$f(X(t+\Delta t))$ をテーラー展開する。ここで、

$$\Delta X(t) = F(X(t))\Delta t + \Delta W \tag{3}$$

ただし、$\Delta X(t) = X(t+\Delta t) - X(t)$ とした。

まず $\Delta X(t)$ について展開する。

$$f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) + \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t)^2 + \ldots \tag{4}$$

(3) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} f(X(t+\Delta t)) &= f(X(t)) + \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 + \Delta X \text{ の3次以上の項} \end{aligned} \tag{5}$$

両辺の平均を考える。

$$\begin{aligned} \langle f(X(t+\Delta t))\rangle &= \langle f(X(t))\rangle + \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle + \langle \Delta X \text{ の3次以上の項} \rangle \end{aligned} \tag{6}$$

○ Δt **のオーダーでも** (6) **式の右辺に** $d^2 f/dx^2$ **が残ることを示す。**

怪しいのは、右辺3項目から出る ΔW^2 の項、つまり

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle \tag{7}$$

仮定1 から

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle \langle \Delta W^2 \rangle \tag{8}$$

仮定2 から

$$= \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t \tag{9}$$

これは、Δt **のオーダーになっている。**

(3) ランジュバン方程式からの導出の詳細

①平均値の方程式

(6) の他の項を計算する。

まず、右辺の 2 項目は、

$$\left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle = \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle \tag{10}$$

(10) 式の右辺 2 項目を**仮定 1** を使って計算する。ΔW の時間は、t より後なので、この仮定から別々に平均することが出来る。

$$\left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle = \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \right\rangle \langle \Delta W \rangle = 0 \tag{11}$$

次に (6) 式の右辺 3 項目は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))^2\Delta t^2 + 2F(X(t))\Delta t\Delta W + \Delta W^2\} \right\rangle \qquad (12) \\ &= \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} F(X(t))^2\Delta t^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t\Delta W \right\rangle \\ &\qquad + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle \qquad (13) \end{aligned}$$

(13) 式の 2 項目は、また**仮定 1** を使って、

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t\Delta W \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} 2F(X(t))\Delta t \right\rangle \langle \Delta W \rangle = 0 \tag{14}$$

3 項目は、(2) で計算した。

結局

$$\begin{aligned} \langle f(X(t+\Delta t))\rangle = \langle f(X(t))\rangle &+ \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} F(X(t))^2\Delta t^2 \right\rangle \\ &+ \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t + \langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \qquad (15) \end{aligned}$$

ここで、**仮定 3** を使う。ΔX の 3 次の項は、$\Delta t^k \Delta W^{n-k}, n \geq 3, k \leq n$ に比例するので、**仮定 3** から、

$$\langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \propto \Delta t^2 \text{以上} \tag{16}$$

となる。したがって、

$$\frac{d}{dt}\langle f(X(t))\rangle \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(X(t+\Delta t)) - f(X(t))}{\Delta t} \tag{17}$$

$$= \left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle + \frac{D}{2}\left\langle \frac{d^2 f}{dX^2} \right\rangle \tag{18}$$

$f = f(X)$ の微分は、微分した後に $X = X(t)$ を代入する。(18) 式は、任意関数 $f(X)$ の**平均値の方程式**を表している。

宿題:

7 (20 点) 授業で扱った例以外に、ランジュバン方程式で記述できる現象を一つ以上探し、**ランジュバン方程式を書いて説明しなさい**。その場合のランダム力の実態は何か。ただし、ここで言うランジュンバン方程式は、「授業ノート 2」の**仮定**に書いてある式を指す。

8 (10 点) 電子が無理やりランジュバン方程式を満たしているとして、以下の様に抵抗を計算しなさい。

電子の速度を $V(t)$ とすると 1 次元で

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) + eE \tag{19}$$

ここで、E は、時間変化しない電場を表す。$t = 0$ で $V(0) = v_0$ とすると、十分時間が経った後で、電流 $n\langle V\rangle S$ が E に比例することを示し、その比例係数を求めなさい。ただし、n と S は、それぞれ電子の密度と導線の断面積をあらわす。

9 (5 点) $\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ を満たすランダム力 $R(t)$ について、

$$\Delta W = \int_t^{t+\Delta t} R(t')dt' \tag{20}$$

とした時、

$$\langle \Delta W^2 \rangle = D\Delta t \tag{21}$$

となる事を示しなさい。

10 (5 点) 複数の確率変数 $\Delta W_i, i = 1, \ldots,$ があって、互いに独立、すなわち $\langle \Delta W_i \Delta W j \rangle = d\delta_{ij}$ の時、

$$\delta W_k \equiv \sum_{i=nk}^{n(k+1)-1} \Delta W_i \tag{22}$$

で定義される δW_k について、$\langle \delta W_k \delta W_l \rangle = nd\delta_{kl}$ を示しなさい。$\langle \Delta W_i \Delta W j \rangle = d$ の時はどうなるか。

11 (20 点) ランダム力についての仮定 2 のかわりに、

$$\langle R(t)R(t') \rangle = \begin{cases} D & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases} \tag{23}$$

の時、平均値の方程式 (18) はどうなるか考えなさい。ただし、後の条件はまったく同じとする。

12 (30 点) 伊藤積分について調べてレポートにしなさい。定義と性質は何か。