2005 年度非平衡物理学 授業ノート 6

2005.12.1 担当 吉森 明

§3-2. Wiener-Khinchin の定理

目標 Wiener-Khinchin の定理を理解する。仮定と結論を覚える。導出は、授業でやったことを忘れない程度。具体的に以下のことを分かる。

- 時間相関関数以外に不規則な時間変化を特徴づけるものがある。
- **時系列のフーリエ変換は時間相関関数と関係がつく。**
- 厳密には、フーリエ変換を有限時間で計算するか、無限時間でするかで、関係式が少し違う。
- 有限時間の場合は、時間相関関数は、時間平均で定義する。
- 相関関数が指数関数の時は、I_ω は**ローレンツ型**。

目次 (1) はじめに

(2) 無限時間の場合

(3) 有限時間の場合

(4) まとめと補足

仮定 1. 定常過程。

2. (3) については、時間相関関数を時間平均で定義。

$$\varphi(t) \equiv \langle X(t)X(t')\rangle \equiv \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t'+\tau)d\tau \tag{1}$$

結論 1. 無限時間の場合:

$$X_\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{i\omega t}dt \tag{2}$$

として、

$$\boxed{\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')\tilde{\varphi}(\omega)} \tag{3}$$

ただし、

$$\tilde{\varphi}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\varphi(t)dt \tag{4}$$

2. 有限時間の場合:

$$I_\omega \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_\omega(T)^* X_\omega(T) \tag{5}$$

ここで

$$X_\omega(T) \equiv \int_0^T X(t) e^{i\omega t} dt \tag{6}$$

とすると、

$$\boxed{I_\omega = \tilde{\varphi}(\omega)} \tag{7}$$

(2) 無限時間の場合

(2) 式を使って

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} \langle X(t) X(t') \rangle \tag{8}$$

定常 (仮定 1) から、$\langle X(t)X(t')\rangle = \varphi(t-t')$。だから、

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} \varphi(t-t') \tag{9}$$

一般に、$f(t,t') = g(t-t')$ となる関数を t と t' の両方でフーリエ変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} f(t,t') = 2\pi\delta(\omega+\omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} g(s) ds \tag{10}$$

となる事が知られている (宿題 24 参照) ので、

$$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega') \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s} \varphi(s) ds \tag{11}$$

(4) 式を使うと、

$$\boxed{\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')\tilde{\varphi}(\omega)} \tag{12}$$

これは、$\langle X_\omega X_{\omega'} \rangle$ は、$\omega' = -\omega$ の時だけ値があり、**時間相関関数のフーリエ変換に比例する**ことを表している。

宿題:

23 (30 点) $X(t)$ が以下の線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{13}$$

に従う時、授業で説明したように相関関数は、$\varphi(t) = \langle X(t)X(0)\rangle = \langle X^2\rangle e^{-\gamma t}$ となる。これは、相関関数の性質 $\dot{\varphi}(0) = 0$ を満たさないように見える。なぜか説明しなさい。ただし、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ として、$D = 2\gamma\langle X^2\rangle$ とすれば、$X(t)$ は定常過程であると示せる。

24 (5 点) (10) 式を導きなさい。

25 (20 点) レーザーにトラップされた 1 次元のコロイド粒子を考える。コロイド粒子の位置を $X = X(t)$、レーザーのつくるポテンシャルを $u(X) = kX^2/2$ とすると、まわりの液体の粘度が小さい時、

$$m\ddot{X}(T) = -\lambda\dot{X}(t) - kX(t) + R(t) \tag{14}$$

と書ける。ここで、m は粒子の質量を表す。$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ の時、Wiener-Khinchin の定理を使って、時間相関関数 $\varphi(t) = \langle X(t)X(0)\rangle$ のフーリエ変換 $\tilde{\varphi}(\omega)$ を求めなさい。