2005 年度非平衡物理学 授業ノート 7

2005.12.8 担当 吉森 明

§3-2. Wiener-Khinchin の定理

(3) 有限時間の場合

実際は有限の時間しか測れないので、

$$X_\omega(T) = \int_0^T X(t)e^{i\omega t}dt \tag{1}$$

ここで、以下の様に**スペクトル密度 (パワースペクトル、スペクトル強度)** を定義する。

$$\boxed{I_\omega \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} X_\omega(T)^* X_\omega(T)} \tag{2}$$

この極限は、以下でみるように、時間相関関数のフーリエ変換があれば、存在する。また、**1 つの軌道で計算できる**。

この定義式 (2) に (1) 式を代入する。

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt' e^{-i\omega t'} \int_0^T dt\, e^{i\omega t} X(t)X(t') \tag{3}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt' \int_0^T dt\, e^{-i\omega(t'-t)} X(t)X(t') \tag{4}$$

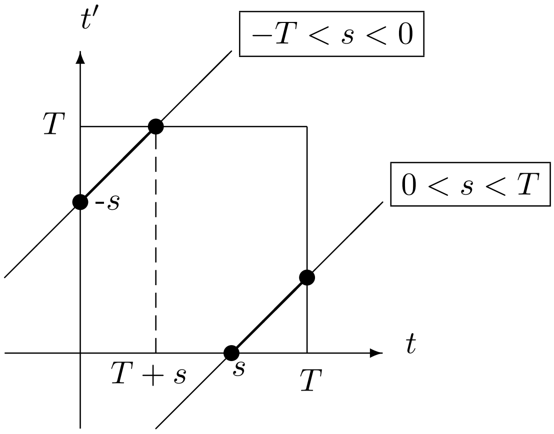
2 つの積分変数 (t, t') を (s, t) に変数変換する。ただし、$s = t - t'$ とする。ヤコビアンは

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t'} \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_t - \left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)_{t'} \left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_t = 1 \times 0 - 1 \times (-1) = 1 \tag{5}$$

したがって、積分範囲は、後で考えることにすると、

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \iint_{0<t'<T, 0<t<T} dtds\, e^{i\omega s} X(t)X(t-s) \tag{6}$$

[戦記分範囲:] 積分の順序は、まず s を固定し t で積分し、その後で s を積分する。その時積分範囲は、下の図のようになる。



- **t の積分範囲は、s によって変る。**

s を固定して t で積分

↓

左図で斜線を 1 本固定して斜線の上を積分

積分するのは四角の中だけ	⟶	t の積分範囲は黒丸の間

この範囲は s がどこにあるかによって変る。

つまり、

$$0 < s < T \text{ の時は } \quad s < t < T \tag{7}$$

$$-T < s < 0 \text{ の時は } \quad 0 < t < T+s \tag{8}$$

結局 t の積分範囲は、s の値によって変るので、**s の積分を 2 つに分けなければならない。**

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T ds \int_s^T dt\ e^{i\omega s} X(t)X(t-s) \right.$$

$$\left. + \int_{-T}^0 ds \int_0^{T+s} dt\ e^{i\omega s} X(t)X(t-s) \right\} \tag{9}$$

1 項目は、t を $\tau = t - s$ に変数変換すると、

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T ds\ e^{i\omega s} \int_0^{T-s} X(\tau+s)X(\tau)d\tau \right. \tag{10}$$

$$\left. + \int_{-T}^0 ds\ e^{i\omega s} \int_0^{T+s} X(t)X(t-s)dt \right\} \tag{11}$$

$\varphi(t)$ に**時間平均の定義 (仮定 2) を使うと**、(11) 式の 1 項目と 2 項目の s の被積分関数は、$T \to \infty$ で、それぞれ $\varphi(s)$ と $\varphi(-s)$ となる。従って、

$$I_\omega = \int_0^\infty ds\ e^{i\omega s}\varphi(s) + \int_{-\infty}^0 ds\ e^{i\omega s}\varphi(-s) = \int_{-\infty}^\infty ds\ e^{i\omega s}\varphi(s) = \tilde{\varphi}(\omega) \tag{12}$$

ここで、$\varphi(-s) = \varphi(s)$ を使った。

§3-3. 時間遅れの応答

目標 線形応答の一般的な式を理解する。特に時間遅れの応答がある場合の式の形が何処から来るのか分かる。

- 線形応答は、応答が外場に比例する現象。
- 線形応答は、外場が小さい時だけしか成り立たないが、実際は、広く成立している。
- 応答は、過去の外場が影響することがある。その時の式の形。
- 線形応答は、線形ランジュバン方程式から計算できる。
- $\alpha(t)$ は、外場によらない。
- 緩和と時間遅れの応答は密接に関係している。

目次 (1) はじめに

(2) 時間遅れ

(3) 線形ランジュバン方程式による例

(4) まとめと補足

仮定
1. **外場が充分弱い。**
2. $f(t) = 0$ の時、定常。
3. 未来の時刻の外場は、現在の応答に影響しない。(因果律)

結論 時間おくれの線形応答は一般的に次の式で書ける。

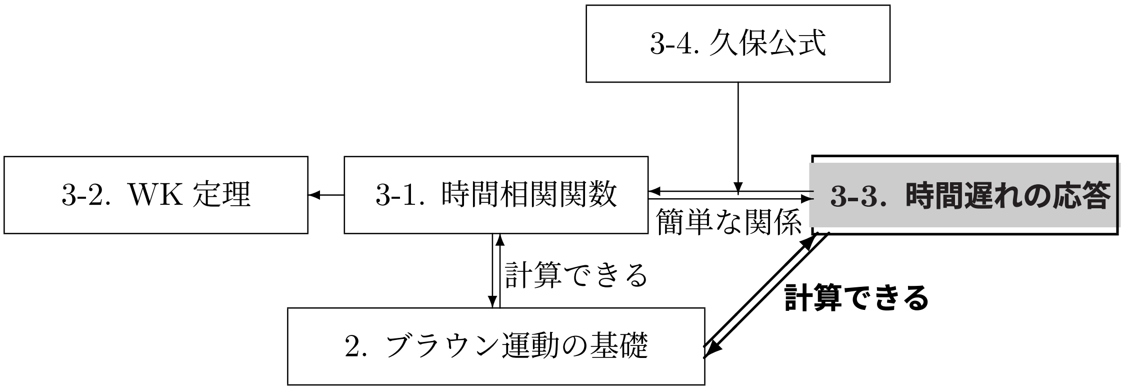
$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t - t')f(t')dt' \tag{13}$$

特に $X(t)$ が線形ランジュバン方程式 $\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t)$ にしたがう場合、$x(t) = \langle X(t) \rangle$ とすると、

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t} \tag{14}$$

(1) **はじめに**

○ 流れ



宿題:

26 (10 点) 時間相関関数が $\varphi(t) = \langle X^2 \rangle e^{-\gamma|t|}$ の時、そのフーリエ変換 $\tilde{\varphi}(\omega)$ が

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{2\langle X^2 \rangle \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{15}$$

のローレンツ型になることを示しなさい。また、これを使って熱雑音の回路 (授業ノート 4 P6 参照) で、コンデンサーにたまる電荷の I_ω((2) 式) を求めなさい。

27 (30 点) 外場が $f(t) = \Re f_0 e^{i\omega t}$ の様に時間変化する時、t が 0 から $2\pi/\omega$ まで経った時の外場が系にした仕事

$$W = -\int_0^{\pi/\omega} x(t)\dot{f}(t)dt \tag{16}$$

を ω、α''_ω と f_0 で表しなさい。ただし、$\Re$ は実部を表し、

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{17}$$

が成り立ち、α''_ω は、$\alpha(t)$ のフーリエ変換の虚部を表す。この仕事は、**パワーロス**と呼ばれる。

28 (40 点) **クラマースクローニッヒの関係式**を調べ、レポートしなさい。