2007 年度非平衡物理学 授業ノート 2

2007.10.10 担当 吉森 明

お知らせ: 授業のホームページをつくりました。

http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/hiheik07.html

連絡を載せたり、授業で配るプリントを pdf でおいておきますので、ご覧ください。

§2. ブラウン運動の基礎

2-1. ランジュバン方程式

目標 ランジュバン方程式の形を覚え、ブラウン運動以外にも不規則な時間変化に応用できることを理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 不規則な運動の特徴。
- ランダム力についての仮定 (下記**「仮定」**参照)。
- ランジュバン方程式の形。
- ランジュバン方程式は微粒子だけでなく、いろいろな不規則な現象に使える。

目次 (1) 不規則な運動

(2) ブラウン運動のモデル

(3) ランジュバン方程式

(4) 具体例

(5) まとめ

仮定 次の式をランジュバン方程式と呼ぶ。

$$\text{線形}:\qquad \dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{1}$$
$$\text{非線形}:\qquad \dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{2}$$

ただし、

$$\langle R(t)\rangle = 0 \tag{3}$$
$$\langle R(t_1)R(t_2)\rangle = D\delta(t_1 - t_2) \tag{4}$$

$(D > 0)$ を満たす。さらに

$$\text{線形}:\qquad \langle X(0)R(t)\rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{5}$$
$$\text{非線形}:\qquad \langle g(X(0))R(t)\rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

ここで、 $g(X)$ は X の任意関数

結論　ランジュバン方程式は、不規則な運動を再現する**モデルとして有効**。

例題　(2-1 が終わった段階で解けるようになる問題。宿題ではない。) コンデンサーと抵抗をつないだ回路で、電源が無いのに、熱雑音で電流が流れる現象がある。コンデンサーにたまる電荷の時間変化を表す式を「ランダム力」を使って書きなさい。

(1) 不規則な運動

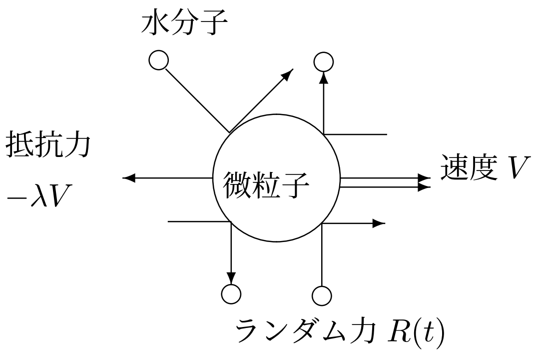
○ www にあるブラウン運動のページ[*1]「4. ブラウン運動のシミュレーション」で、粘性抵抗と温度を選んで開始ボタンを押すと粒子が動き出す。軌跡も書ける。

○ どういう運動を不規則と感じるのか。

- 規則的な運動
- スケートの例

(2) ブラウン運動のモデル

○ 1908 年、ランジュンバンは、ブラウン運動を表す数式をつくった。



微粒子は、水分子から 2 種類の力を受ける。

1. 止まっていても受ける力 (**ランダム力**): $R(t)$
2. 動きを止めようとする力 (抵抗力): $-\lambda V(t)$

運動方程式は、m を微粒子の質量とすると、

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \tag{7}$$

○ ランダム力 $R(t)$ の性質

①$R(t) \propto \delta(t - t_0)$: デルタ関数 ($t_0$ は力の働く時刻)

軌道がガタガタ (微分が発散) ということは、速度 (運動量) が不連続に変わる。つまり、力は普通の力でなく撃力でなければならない。なぜなら、運動量の変化を Δp とすると、

$$\Delta p = F\Delta t \tag{8}$$

[*1] http://www.geocities.co.jp/Hollywood/5174/indexb.html。

ここで、F は力、Δt は力が作用する時刻を示す。$\Delta t \to 0$ で Δp が 0 にならないためには、$F \to \infty$ でなければならない。これは撃力、つまり、$R(t) \propto \delta(t - t_0)$ となる事を表している。

②$R(t)$ は確率変数。

● もし、毎回同じ力が働くとすると、100 発 100 中で必ず予想出来る。

　たとえば、フィギュアスケートではストレートラインステップという技があるが、これはとても複雑な動きをする。しかし、試合のたびにまったく同じ動きを示すので、不規則な運動ではない。

● 不規則な運動は測るたびに $R(t)$ がちがう。100 発 100 中では予想出来ない。つまり、$R(t)$ **は確率変数**。

● $R(t)$ は確率変数なので確率分布が考えられる。

　t_1 の時刻に R_1〜$R_1 + dR_1$、t_2 の時刻に R_2〜$R_2 + dR_2$、t_3 の時刻に R_3〜$R_3 + dR_3$、$\ldots$、にある確率は、

$$\rho(t_1, t_2, \ldots; R_1, R_2, \ldots) dR_1 dR_2 \ldots \tag{9}$$

で書ける。　この確率分布を使って平均を定義する。例えば、

$$\langle R(t) \rangle = \int R_1 \rho(t_1, t_2, \ldots; R_1, R_2, \ldots) dR_1 dR_2 \ldots \tag{10}$$

また、

$$\langle R(t_1) R(t_2) \rangle = \int R_1 R_2 \rho(t_1, t_2, \ldots; R_1, R_2, \ldots) dR_1 dR_2 \ldots \tag{11}$$

は、相関関数を表す。これらの平均は**時間平均では無い**事に注意しなさい。

○ $R(t)$ の 2 つの性質①②を満たす最も簡単なモデル (他にもあるかもしれない) として (3) 式と (4) 式を仮定する。(3) 式は全ての時刻で平均が 0 を表す。(4) 式は、他の時刻との相関が無い事を表す。

(3) ランジュバン方程式

○ 微粒子の運動では、注目している物理量は、微粒子の速度 V だった。一般に、不規則な時間変化をする量 $X(t)$ に対して、ランジュバン方程式を考える事ができる。

○ (5) 式の条件

　$t > 0$ で $R(0)$ は $X(t)$ に影響するので、$\langle R(0) X(t) \rangle \neq 0$ となる。一方、未来のランダム力 $R(t)$ は過去の $X(0)$ に影響しない。つまり、独立なので、

$$\langle R(t) X(0) \rangle = \langle R(t) \rangle \langle X(0) \rangle = 0 \tag{12}$$

(4) 具体例

①水中の微粒子

(7) 式から

$$\dot{V}(t) = -\gamma V(t) + \frac{R(t)}{m}, \qquad \gamma = \frac{\lambda}{m} \tag{13}$$

$X(t) = V(t)$ すれば、線形ランジュバン方程式を表す (1) 式に対応する。

②熱雑音の回路 (例題解答)

容量 C のコンデンサーと値が R の抵抗をつなげると、電源が無いのに、細かい電流が雑音のように流れる。今、コンデンサーにかかる電圧を V_0、たまる電荷を Q とすると、

$$V_0 = \frac{Q}{C} \tag{14}$$

抵抗にかかる電圧は、$-V_0$ の他に熱雑音 $V(t)$ があるとして、電流を I とすると、オームの法則から

$$-V_0 + V(t) = RI \tag{15}$$

$I = \dot{Q}$ だから、

$$R\dot{Q} = -\frac{Q}{C} + V(t) \tag{16}$$

$\gamma = 1/(RC)$、$R(t) = V(t)/R$ とすれば線形ランジュバン方程式に対応する。

③レーザーにトラップされたコロイド粒子

水中のコロイド粒子は、放っておけばブラウン運動して、動き回る。しかし、レーザーによってある程度位置を束縛する事ができる。

今、コロイドの 3 次元の位置を $\mathbf{X}(t)$、レーザーが作るポテンシャルを $u(\mathbf{X})$、コロイドの質量を m とすると、運動方程式は、

$$m\ddot{\mathbf{X}}(t) = -\lambda\dot{\mathbf{X}}(t) - \nabla u(\mathbf{X}) + \mathbf{R}'(t) \tag{17}$$

ここで、$-\lambda\dot{\mathbf{X}}(t)$ は水分子からの抵抗、$\mathbf{R}'(t)$ はランダム力を表す。m が充分小さい極限で加速の項は無視できるので、

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = -\frac{1}{\lambda}\nabla u(\mathbf{X}) + \frac{\mathbf{R}'(t)}{\lambda} \tag{18}$$

つまり、コロイド粒子は多変数の非線形ランジュバン方程式にしたがう事がわかる。

宿題:

2 (10 点) 講義では不規則な運動として、次の 2 点の性質を挙げた。

(a) 軌道がガタガタしている。(いたるところ微分不能)

(b) 同じ初期条件から始めても違う運動。つまり予測できない。

今、2 次元上の粒子の運動を考える。軌道がガタガタしていても、毎回まったく同じ軌道を描き、ただし、速度が毎回違う運動は、上の 2 つの性質を満たす。しかし、この運動は規則的な感じがしてしまう[*2]。この不都合を解消するよう、不規則な運動の妥当な定義を考えなさい。

3 (15 点) (1) 式と (3)-(5) 式で計算される $X(t)$ が不規則な時間変化をすることを数値的に確かめよ。ただし、時刻 t を $t_i (i=1,\ldots,n)$ のように離散化し、(1) 式を

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = -\gamma X(t_i)\Delta t + W(t_i) \tag{19}$$

のように差分化しなさい。$W(t_i)$ は、それぞれの時間で独立なガウス分布 (平均 0、分散 $D\Delta t$) になるように乱数を引いて値を決めよ。適当な初期条件 $X(t_1)$ を与えて、実際に計算機で計算して、横軸 t、縦軸 $X(t)$ のグラフを書け。γ や D も適当に与えて良い。ただし、γ の大きさを変え、グラフの形がどう変るか調べよ。

4 (15 点) 微粒子の 3 次元ブラウン運動が次のランジュバン方程式で表されるとする。

$$m\dot{\mathbf{V}}(t) = -\lambda \mathbf{V}(t) + \mathbf{R}(t) \tag{20}$$

ただし、$\mathbf{V}(t)$ は微粒子の 3 次元速度ベクトル、m は質量で、$\mathbf{R}(t)$ は R_x、R_y、R_z を成分に持つ 3 次元ベクトルのランダム力で、

$$\langle R_\alpha(t)\rangle = 0 \qquad \alpha = x, y, z \tag{21}$$

$$\langle R_\alpha(t) R_\beta(t')\rangle = D\delta(t-t')\delta_{\alpha\beta} \qquad \beta = x, y, z \tag{22}$$

$$\langle V_\alpha(0) R_\beta(t)\rangle = 0 \tag{23}$$

を満たす。$V_\alpha(t)$ は、速度ベクトルの α 成分を表す。$t=0$ で、$\mathbf{V}(0)=\mathbf{V}_0$、$\mathbf{r}(0)=0$ が分かっている場合に、$\mathbf{V}(t)$ と $\mathbf{r}(t)$ の平均 ($\langle \mathbf{V}(t)\rangle$、$\langle \mathbf{r}(t)\rangle$) と分散 ($\langle|\mathbf{V}(t)|^2\rangle - |\langle \mathbf{V}(t)\rangle|^2$、$\langle|\mathbf{r}(t)|^2\rangle - |\langle \mathbf{r}(t)\rangle|^2$) を求めなさい。ただし、$\mathbf{r}(t)$ は、微粒子の位置を表し、$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{V}(t)$ とする。

[*2] これは、2003 年度の受講生永末勇治さんの指摘です。