2007 年度非平衡物理学 授業ノート 3

2007.10.17 担当 吉森 明

2-2. フォッカー・プランク (FP) 方程式 [*1]

目標 FP 方程式の導出における仮定を理解し、ランジュバン方程式から FP 方程式を自分でつくれるようにする。具体的には以下のことを分かる。

- 分布関数 $P(x,t)$ は時刻 t に不規則な変数 X が x〜$x+dx$ にある確率と関係し、FP 方程式は、その時間変化を表す。
- $X(t)$ がランジュバン方程式を満たす時、任意関数 $f(x)$ を t でテーラー展開すると、1 次のオーダーまでに x に関する **2 階微分**が含まれる。
- FP 方程式は下の仮定 1、2、3 を満たした時ランジュバン方程式から導ける。
- ランジュバン方程式が与えられた時の FP 方程式の形。

目次 (1) 分布関数と FP 方程式

(2) $X(t)$ を含む関数の時間微分

(3) ランジュバン方程式から FP 方程式の導出

(4) 具体例

(5) まとめ

仮定

1. $X(t)$ と $R(t')$ が $t < t'$ で統計的に独立。
2. $\langle R(t)\rangle = 0, \langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$
3. $R(t)$ がガウス過程。
4. 考えている領域は無限で、$P(x,t)$ を分布関数とすると、
   $x \to \pm\infty$ で、$P(x,t) \to 0, \partial P(x,t)/\partial x \to 0$

結論 非線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{1}$$

と FP 方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \{-\frac{\partial}{\partial x}F(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{D}{2}\}P(x,t) \tag{2}$$

は、等価。

例題 (2-2 が終わった段階で解ける様になる問題。宿題ではない。) 充分たくさんの原子が 1 列につながっている高分子がある。つながっている 2 つの原子のボンド長は

[*1] 参考文献: 宗像豊哲著「物理統計学」朝倉書店

ガウス分布すると仮定し、その他に原子同士に相互作用はないとする。高分子の端を固定した時、もう片一方の端がどこにあるか分布関数を求めなさい。

(1) 分布関数と FP 方程式

○ 例えばブラウン運動を考える時、微粒子の位置を $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ とすると、$\mathbf{X}(0)$ が同じであっても、$\mathbf{X}(t)$ は分布する。1 回目の測定で、ある位置にあっても、2 回目、3 回目の測定では微粒子は全然別の場所に行く可能性がある。

一般に、不規則に変化する変数 X に対して、分布関数 $P(x,t)$ が定義出来る。

分布関数 $P(x,t)$:
時刻 t に X が x〜$x+dx$ にある確率 $= P(x,t)dx$

○ 分布関数は時間変化する。

ブラウン運動の場合、$t=0$ で微粒子に位置がはっきり決まっていれば、分布はない。しかし、時間が経てば、分布ができ、時間とともに分布は広がっていく。これを $P(x,t)$ で考えると、$t=0$ では $P(x,t)$ は幅の無いデルタ関数だが、時間が経つと幅が出来て、時間とともに幅が広がっていく。

この $P(x,t)$ の時間変化は FP 方程式によって表せる。

○ 平均

任意関数 $f(X)$ の平均 $\langle f(X) \rangle$ は、

$$\langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x,t)dx \tag{3}$$

(2) $X(t)$ を含む関数の時間微分

○ 時間微分を考える前に準備として、非線形ランジュバン方程式 $\dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t)$((1) 式) を t から $t+\Delta t$ 間で積分する (差分化)。

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{X}(t')dt' = \int_t^{t+\Delta t} F(X(t))dt' + \int_t^{t+\Delta t} R(t)dt' \tag{4}$$

左辺は、

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{X}(t')dt' = X(t+\Delta t) - X(t) \tag{5}$$

右辺第 1 項は、Δt が充分小さいと仮定すれば、

$$\int_t^{t+\Delta t} F(X(t))dt' \approx F(X(t))\Delta t \tag{6}$$

と近似できる。第 2 項は、$R(t)$ がデルタ関数に比例するので、(6) 式のように近似できない。

$\Delta X(t) \equiv X(t+\Delta t) - X(t)$ および、

$$\Delta W \equiv \int_t^{t+\Delta t} R(t_1)dt_1 \tag{7}$$

とすると、結局、(4) 式は

$$\Delta X(t) = F(X(t))\Delta t + \Delta W \tag{8}$$

と書くことが出来る。

ΔW については、**仮定**2 から

$$\langle \Delta W \rangle = 0 \tag{9}$$

$$\boxed{\left\langle \Delta W^2 \right\rangle = D\Delta t} \tag{10}$$

(10) 式は、次のように示せる。

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta W^2 \right\rangle &= \left\langle \int_t^{t+\Delta t} R(t_1)dt_1 \int_t^{t+\Delta t} R(t_2)dt_2 \right\rangle && (11) \\ &= \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \langle R(t_1)R(t_2)\rangle \, dt_1dt_2 && (12) \end{aligned}$$

仮定2 の $\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ から

$$\begin{aligned} &= \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} D\delta(t_1-t_2)dt_1dt_2 && (13) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} Ddt_2 = D\Delta t && (14) \end{aligned}$$

○ いよいよ本題として、$f(x)$ を任意関数にして、$f(X(t+\Delta t))$ をテーラー展開する。まず、$X(t)$ が t についてなめらかな時、(ランジュバン方程式に**したがわない**) 時を考える。

$$f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) + \frac{df}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dt^2}\Delta t^2 + \cdots \tag{15}$$

合成関数の微分法から

$$= f(X(t)) + \frac{df}{dX}\frac{dX}{dt}\Delta t + \Delta t \text{ の 2 次以上} \tag{16}$$

つまり、Δt のオーダーでは $f(X)$ の 1 階微分しか含まれない。特に、2 階微分はない。

○ 次に $X(t)$ がランジュバン方程式にしたがう場合を考える。$\Delta X(t)$ について展開すると、

$$f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) + \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta X(t)^2 + \ldots \tag{17}$$

(8) 式を代入すると、

$$\begin{aligned} f(X(t+\Delta t)) = f(X(t)) &+ \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \\ &+ \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 + \Delta X \text{ の 3 次以上の項} \end{aligned} \tag{18}$$

両辺の**平均**を考える。

$$\begin{aligned} \langle f(X(t+\Delta t))\rangle = \langle f(X(t))\rangle &+ \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle \left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle + \langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \end{aligned} \tag{19}$$

○ **Δt のオーダーでも (19) 式の右辺に $d^2 f/dx^2$ が残ることを示す。**

怪しいのは、右辺 3 項目から出る ΔW^2 の項、つまり

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle \tag{20}$$

$\Delta W \equiv \int_t^{t+\Delta t} R(t_1)dt_1$ だから、ΔW の中にある $R(t_1)$ の時間は、$t_1 \geq t$ となる。その時、**仮定**1 が使えて*2、

$$\left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \Delta W^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle \langle \Delta W^2 \rangle \tag{21}$$

*2 $t_1 = t$ が問題になるが、「被積分関数が発散しない 1 点を積分範囲から除いても、積分の値は変わらない」という積分の性質を使えば、(21) 式が成り立つのがわかる。

(10) 式から

$$= \left\langle \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dX^2} \right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t \tag{22}$$

これは、Δt **のオーダーになっている。**

(3) ランジュバン方程式から FP 方程式の導出

導出の流れ

①$\langle f(X) \rangle$ を t でテーラー展開 → 平均値 $\langle f(X) \rangle$ の時間変化を表す方程式

② 平均値の方程式 →FP 方程式

①平均値の方程式

(19) の他の項を計算する。

まず、右辺の 2 項目は、

$$\begin{aligned} &\left\langle \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\} \right\rangle \\ &\qquad = \left\langle \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle \end{aligned} \tag{23}$$

(23) 式の右辺 2 項目は、(21) 式と同様に**仮定 1** から、

$$\left\langle \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X(t)} \Delta W \right\rangle = \left\langle \left. \frac{df}{dX} \right|_{X=X(t)} \right\rangle \langle \Delta W \rangle = 0 \tag{24}$$

ここで、(9) 式 $\langle \Delta W \rangle = 0$ を使った。

次に (19) 式の右辺 3 項目は、(22) 式を使えば、簡単な計算で

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\langle \left. \frac{d^2 f}{dX^2} \right|_{X=X(t)} \{F(X(t))\Delta t + \Delta W\}^2 \right\rangle \\ &\qquad = \left\langle \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dX^2} \right|_{X=X(t)} F(X(t))^2 \Delta t^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dX^2} \right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t \end{aligned} \tag{25}$$

結局

$$\langle f(X(t+\Delta t))\rangle$$
$$= \langle f(X(t))\rangle + \left\langle \left.\frac{df}{dX}\right|_{X=X(t)} F(X(t))\Delta t \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} F(X(t))^2\Delta t^2 \right\rangle$$
$$+ \left\langle \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dX^2}\right|_{X=X(t)} \right\rangle D\Delta t + \langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \tag{26}$$

ここで、**仮定 3** を使う。$R(t)$ がガウス過程というのは、ここでは ΔW が**ガウス分布**をしているのと等価になっている。このことを使うと、

$$\langle \Delta X \text{ の 3 次以上の項 } \rangle \propto \Delta t^2 \text{以上} \tag{27}$$

を示すことが出来る (宿題 9 参照)。したがって、

$$\frac{d}{dt}\langle f(X(t))\rangle \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(X(t+\Delta t)) - f(X(t))}{\Delta t} \tag{28}$$
$$= \left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle + \frac{D}{2}\left\langle \frac{d^2 f}{dX^2} \right\rangle \tag{29}$$

$f = f(X)$ の微分は、微分した後に $X = X(t)$ を代入する。(29) 式は、任意関数 $f(X)$ の**平均値の方程式**を表している。

② FP 方程式

平均値は、分布関数を使い、

$$\langle f(X(t))\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)P(x,t)dx \tag{30}$$

と表せる。したがって、

$$\frac{d}{dt}\langle f(X(t))\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}dx \tag{31}$$

また、(29) 式の右辺も分布関数で表せて、1 項目は、

$$\left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} F(x)P(x,t)dx \tag{32}$$

部分積分すると、

$$\left\langle \frac{df}{dX} F(X(t)) \right\rangle = [f(x)F(x)P(x,t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\}dx \tag{33}$$

仮定 4 から、

$$\left\langle \frac{df}{dX}F(X(t)) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\}dx \tag{34}$$

平均値の方程式の 2 項目は、

$$\frac{D}{2}\left\langle \frac{d^2 f}{dX^2} \right\rangle = \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f}{dx^2}P(x,t)dx \tag{35}$$

これも**部分積分**すると、

$$= \frac{D}{2}\left[\frac{df}{dx}P(x,t)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)dx \tag{36}$$

仮定 4 から、

$$= -\frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)dx \tag{37}$$

もう 1 度**部分積分**

$$= -\frac{D}{2}\left[f(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{38}$$

仮定 4

$$= \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{39}$$

結局

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\}dx + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}dx \tag{40}$$

これが、任意の $f(x)$ で成り立つためには、

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\{F(x)P(x,t)\} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{41}$$

これは、FP 方程式。

(4) 具体例

① ブラウン粒子

ランジュバン方程式は、線形で $m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t)$ だから、$X = V$ で、$\gamma = \lambda/m$ とすると、$F(V) = -\gamma V$ となる。$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ の時、仮定がすべて満たされているとすると、FP 方程式は、

$$\frac{\partial P(v,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}\{\gamma v P(v,t)\} + \frac{D'}{2}\frac{\partial^2 P(v,t)}{\partial v^2} \tag{42}$$

ここで、$D' = D/m^2$ とした。

② 熱雑音の回路

この場合もランジュバン方程式は、線形で $R\dot{Q}(t) = -Q(t)/C + V(t)$ だから、$X = Q$ で、$F(Q) = -Q/CR$ となる。$\langle V(t)V(t')\rangle = D_V\delta(t-t')$ の時、仮定がすべて満たされているとすると、FP 方程式は、

$$\frac{\partial P(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{q}{CR}P(q,t)\right\} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 P(q,t)}{\partial q^2} \tag{43}$$

ここで、$D = D_V/R^2$ とした。

③ レーザーにトラップされたコロイド粒子 (1 次元)

簡単のため 1 次元を考える。$X(t)$ をコロイド粒子の 1 次元の位置とすると、以前と同じように考えて、非線形ランジュバン方程式 $\dot{X}(t) = -u'(X)/\lambda + R(t)$ を考えることが出来る。$u'(X)$ は、レーザーがつくるポテンシャル $u(X)$ を X で微分したもの、$R(t)$ は 1 次元のランダム力を λ で割ったものを表す。$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ の時、仮定がすべて満たされているとすると、

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{u(x)}{\lambda}P(x,t)\right\} + \frac{D}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{44}$$

④ 高分子 (**例題**)

簡単のため 1 次元を考える。X_i を端から i 番目の原子の 1 次元の位置として、ΔW をボンド長とすると、

$$X_{i+1} - X_i = \Delta W \tag{45}$$

$t = i\Delta t$、$X(t) = X_i$ とすると、$X(t+\Delta t) = X_{i+1}$ だから、$X(t+\Delta t) - X(t) = \Delta W$ と書ける。この式は、ΔW の分布が i によらず独立とすれば、(8) 式で $F(X) = 0$ とした

ものと一致する。したがって、$\Delta t \to 0$ の極限で、分布関数 $P(x,t)$ は、

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{46}$$

にしたがう。ここで、D は $\langle \Delta W^2 \rangle = D\Delta t$ で定義し、仮定はいつものようにすべて満たされているとする。また、t は時刻ではなく、高分子の端からの長さを表す。(46) 式を $t=0$ で $P(x,0)=\delta(x)$ の初期条件で解けば、$P(x,t)$ を求める事ができる (宿題 13 参照)。さらに、高分子の全長を T とすれば、$P(x,T)$ が求める分布関数となる。

宿題:

5 (10 点) 線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{47}$$

で、$\langle X(0)R(t)\rangle = 0, t \geq 0$ の時、$t' > t > 0$ でも $\langle X(t)R(t')\rangle = 0$ を示しなさい。ただし、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$ とする。

6 (20 点) 授業で扱った例以外に、ランジュバン方程式で記述できる現象を 2 つ以上探し、**ランジュバン方程式を書いて説明しなさい**。ランジュバン方程式の各項を説明し、特にランダム力について、仮定 (「授業ノート 2」の (3)、(4) 式) をなぜ満たしていると考えられるか述べなさい。ただし、ここで言うランジュンバン方程式は、「授業ノート 2」の**仮定**に書いてある式を指す。

7 (10 点) ランダム力の相関がデルタ関数になること (「授業ノート 2」の (4) 式) を、「授業ノート 2」の P2-3 にあるランダム力の性質から説明しなさい。

8 (15 点) 伊藤積分について調べてレポートにしなさい。定義を説明し、普通の積分との違いを答えなさい。

9 (10 点) (27) 式を ΔW の確率 $P(\Delta W)$ がガウス分布

$$P(\Delta W) \propto \exp[-\frac{\Delta W^2}{2D\Delta t}] \tag{48}$$

となることを使って導きなさい。

10 (10 点) P1 の FP 方程式の導出に必要な**仮定**4 が成り立たない場合を考える。授業では考える範囲を $-\infty$ から ∞ としたが、ここでは 0 から L までにして、壁を考える。簡単のため (1) 式で $F(X)=0$ として、$x=0,L$ で、$\partial P(x,t)/\partial x = 0$ を仮定する。これは壁の外から粒子が入ってこないことを意味する。また、$x=0,L$ で、$P(x,t)=0$ は**仮定しない**。つまり、壁の際まで粒子は近づける。この仮定の

もとで、平均値の方程式から FP 方程式 (2) が導けるか答えなさい。もし、導けない時は、その物理的な理由を論じなさい。$f(x) = x$ として、$\langle X \rangle$ の時間変化を考えると論じやすい。

11 (20 点) 仮定4 について、今度は周期境界条件 $P(x,t) = P(x+L,t)$ を考える。$f(x) = x$ とした時、平均値の方程式から FP 方程式 (2) が導けるか答えなさい。もし、導けない時は、その物理的な理由を論じなさい。ただし、$F(x)$ は周期境界条件 $F(x) = F(x+L)$ を満たす。

12 (10 点) 宿題 6 で挙げたランジュバン方程式に対応した FP 方程式を 2 つ以上書き下せ。

13 (10 点) 変数が 2 個以上ある時 ($\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} = \{X_\alpha\}$)、ランジュバン方程式

$$\dot{X}_\alpha(t) = F(\{X_\alpha\}) + R_\alpha(t) \tag{49}$$

を考える。ただし、$X_\alpha(t)$ は、$R_\beta(t')$ のすべて ($\beta = 1, \ldots, n$) と、それぞれ $t < t'$ で独立で、しかも $R_\alpha(t)$ は

$$\langle R_\alpha(t) \rangle = 0 \tag{50}$$

$$\langle R_\alpha(t) R_{\beta(t')} \rangle = D_{\alpha\beta}\delta(t-t') \tag{51}$$

を満たし、ガウス過程だとする。分布関数を $P(\{x_\alpha\},t)$ とする時、FP 方程式

$$\frac{\partial P(\{x_\alpha\},t)}{\partial t} = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left\{-F(\{X_\alpha\})P(\{x_\alpha\},t)\right\} + \sum_{\alpha,\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}P(\{x_\alpha\},t) \tag{52}$$

を導きなさい。ただし、$x_\alpha \to \infty$ あるいは、$x_\alpha \to -\infty$ の時

$$P(\{x_\alpha\},t) \to 0, \qquad \frac{\partial P(\{x_\alpha\})}{\partial x_\alpha} \to 0 \tag{53}$$

とする。

14 (20 点) $\gamma = \lambda/m$ が充分に大きい 3 次元のブラウン運動は、

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{R}(t) \tag{54}$$

のように書ける。ここで、$\mathbf{X}(t)$ は、ブラウン粒子の位置ベクトルを表す。今、次の 4 つの仮定:①$\mathbf{X}(t)$ は $\mathbf{R}(t')$ と $t < t'$ で独立、②ベクトル $\mathbf{R}(t)$ の成分を $R_x(t), R_y(t), R_z(t)$ と書くと、$\langle R_\alpha(t) \rangle = 0$、$\langle R_\alpha(t) R_{\beta(t')} \rangle = D\delta_{\alpha\beta}\delta(t-t')$、③$\mathbf{R}(t)$ はガウス過程、④$\mathbf{x} \to \pm\infty$ で、

$$P(\mathbf{x},t) \to 0, \qquad \frac{\partial P(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}} \to 0 \tag{55}$$

を満たす時、 FP 方程式を導いたのと同じように拡散方程式

$$\frac{\partial P(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \frac{D}{2}\nabla^2 P(\mathbf{X},t) \tag{56}$$

を導きなさい。また、この拡散方程式の解を、$t=0$ で $P(\mathbf{X},0)=\delta(\mathbf{X})$ の初期条件で求めなさい。それを使って、時刻 t に微粒子が $r \sim r+\Delta r$ にある確率を求めなさい。ただし、$r=|\mathbf{X}|$ で、Δr は充分小さいとする。

15 (5 点) N 個のブラウン粒子を考える。P2 で定義された $P(x,t)$ が、時刻 t に $x \sim x+dx$ にある粒子の個数を N で割ったものと一致するための条件を考えよ。

16 (5 点) $X(t)$ をランジュバン方程式にしたがうとしたとき、なぜ (15) 式や (16) 式のような議論が出来ないのかを答えなさい。