2007 年度非平衡物理学 授業ノート 8

2007.11.28 担当 吉森 明

§3-3. 時間遅れの応答

目標 時間遅れの線形応答の式を覚える。その式が線形応答の範囲で一般的な式であることを理解する。

- 線形応答は、外場が小さいときに応答が外場に比例する現象で、広く見られる。
- 応答は、過去の外場が影響することがある。その時の式の形。
- 線形応答は、線形ランジュバン方程式から計算できる。
- $\alpha(t)$ は、外場によらない。

目次
(1) はじめに
(2) 時間遅れの式
(3) 線形ランジュバン方程式による例
(4) まとめと補足

仮定
1. (a) **外場 $f(t)$ が充分弱い。**
   (b) $f(t) = 0$ の時、定常過程。
   (c) 未来の時刻の外場は、現在の応答に影響しない。(因果律)
2. 不規則に時間変化する変数 $X(t)$ が線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t) \tag{1}$$

にしたがい、外場に依存する物理量 $x(t)$ は $x(t) = \langle X(t) \rangle$ で与えられる。

結論
1. 時間おくれの線形応答は一般的に次の式で書ける。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t - t') f(t') dt' \tag{2}$$

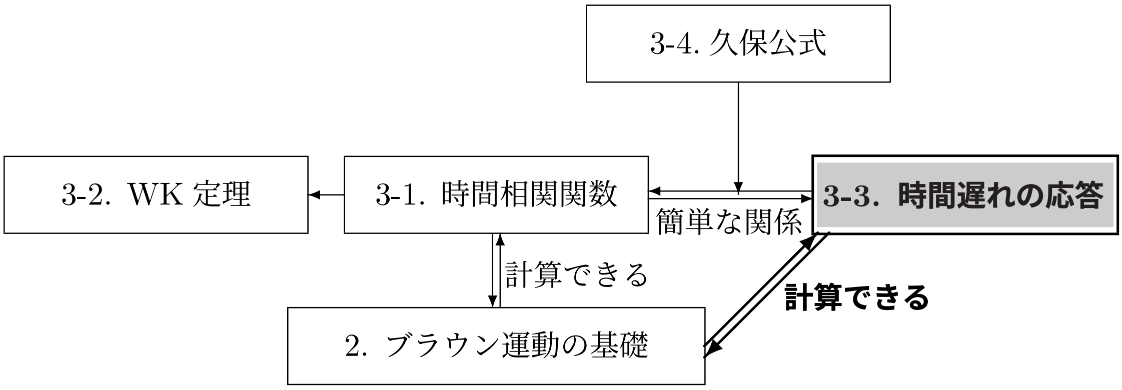
2.

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t} \tag{3}$$

例題 1 次元のコロイド粒子を中心位置が時間変化するレーザーでトラップする。粒子の位置を $X = X(t)$ とすると、レーザーのポテンシャルが $u(X) = k(X - x_0(t))^2/2$ で書ける時、$x(t) = \langle X(t) \rangle$ を求めなさい。ただし、$x_0(t) = A\cos\omega t$ とする。

(1) はじめに

○ 流れ



○ オームの法則

$$I = \frac{V}{R} \qquad : \text{電圧} V \text{を外場と見ると電流} I(\text{応答}) \text{が外場に比例} \tag{4}$$

他に外場と応答が比例関係にあるものはあるか?

まとめると、

$$\boxed{\text{物理量 } x(\text{応答}) \propto \text{外場 } f} : \text{線形応答}$$

線形応答は多くの現象で見られる。ただし、**外場が小さいときに成立**。例えばオームの法則で

$$I = \frac{V}{R} + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 V^3 + \cdots \qquad : \text{テーラー展開} \tag{5}$$

V/R 以外の項は、V が小さいとき無視できる。

(2) 時間遅れの式

○ 外場 f が時間変化するとき ($f = f(t)$)、物理量 x がすぐに応答するとは限らない。

例　日照 (外場 $f(t)$) と気温 (応答 x)。日照は正午がピークだが、気温のピークは正午からずれる。これは時間遅れの応答を表す。

○ 今の時刻 t の応答は過去の時刻 t' からの影響の累積。今の時刻 t に対する、過去の時刻 t' の単位時間あたりの寄与を $x(t,t')$ とすると、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t,t')dt' \tag{6}$$

仮定1a から、応答が $f(t')$ に比例する (線形応答) とするので、

$$x(t,t') = \alpha(t,t')f(t') \tag{7}$$

例　日照の例で考えると

$f(t')$	時刻 t' の単位時間あたりの日射量。
$x(t,t')$	時刻 t の気温に対する時刻 t' の日射による寄与。

外場が無いとき定常過程とすると (**仮定**1b)、

$$\alpha(t,t') = \alpha(t-t') \tag{8}$$

以上より (2) が導ける。ただし、積分の上限は t になっている。これは、未来の外場は影響しないという**仮定**1c から来ている。

(3) 線形ランジュバン方程式による例

○ 線形ランジュバン方程式に外場 $f(t)$ を加える。

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t) \tag{9}$$

$x(t) = \langle X(t)\rangle$ と考える (**仮定**2)。両辺平均をとると、$\langle R(t)\rangle = 0$、$\langle f(t)\rangle = f(t)$ だから、

$$\langle \dot{X}(t)\rangle = -\gamma\langle X(t)\rangle + f(t) \tag{10}$$

$\langle \dot{X}(t)\rangle = d\langle X(t)\rangle/dt = \dot{x}(t)$ だから、

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + f(t) \tag{11}$$

(11) 式は係数変化法で解くことが出来る (**付録**参照)。$t = t_0$ のとき $x = x(t_0)$ とすると、

$$x(t) = e^{-\gamma(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{12}$$

ここで、t_0 は外場をかけ始める時間とする。

$t_0 \to -\infty$ とすると、$e^{-\gamma(t-t_0)} = e^{-\gamma t+\gamma t_0} \to 0$ だから、右辺第 1 項は 0 になる。2 項目の積分の下限を $-\infty$ にして、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{13}$$

つまり、$\alpha(t) = \exp[-\gamma t]$

例 1．熱雑音の回路

電圧が時間変化する電源 $E(t)$ を考えると、コンデンサーにかかる電圧は、$Q(t)/C$ だから、

$$\frac{Q(t)}{C} + RI = V(t) + E(t) \tag{14}$$

$I = \dot{Q}(t)$ で、

$$\dot{Q}(t) = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{V(t)}{R} + \frac{E(t)}{R} \tag{15}$$

これは、(9) 式で

$$\gamma = \frac{1}{RC}, \qquad f(t) = \frac{E(t)}{R} \tag{16}$$

とおくのと同じ。したがって、(13) 式から

$$q(t) = \langle Q(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-t')}{CR}} \frac{E(t')}{R} dt' \tag{17}$$

となる。

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha_E(t-t') E(t') dt' \tag{18}$$

と書くと、

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{R} \exp[-\frac{t}{CR}] \tag{19}$$

例 2．例題の答え

ランジュバン方程式は、

$$\dot{X}(t) = -\gamma \frac{du(X(t))}{dX} + R(t) \tag{20}$$

$$= -\gamma k (X - x_0(t)) + R(t) \tag{21}$$

これは、(9) 式で、$\begin{cases} \gamma \to \gamma k \\ f \to \gamma k x_0(t) \end{cases}$ としたものと同じだから、

$$x(t) = \langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t') \gamma k x_0(t') dt' \tag{22}$$

で、

$$\alpha(t) = e^{-\gamma k t} \tag{23}$$

となる。

$x_0(t) = A\cos\omega t = \Re A e^{i\omega t}$ ($\Re$ は実部を表す記号) だから、(23) 式とともに、(22) 式に代入すると、

$$x(t) = \Re\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma k(t-t')}\gamma k A e^{i\omega t'}dt' \tag{24}$$

$$= \Re e^{-\gamma k t}\int_{-\infty}^{t}\gamma k A\exp[\gamma k t' + i\omega t']dt' \tag{25}$$

$$= \Re e^{-\gamma k t}\left[\gamma k A\frac{\exp[\gamma k t' + i\omega t']}{\gamma k + i\omega}\right]_{-\infty}^{t} \tag{26}$$

$t' \to -\infty$ で $e^{\gamma k t'} \to 0$ だから

$$= \Re\gamma k A\frac{e^{i\omega t}}{\gamma k + i\omega} \tag{27}$$

$$= \gamma k A\frac{\gamma k}{\gamma^2 k^2 + \omega^2}\cos\omega t + \gamma k A\frac{\omega}{\gamma^2 k^2 + \omega^2}\sin\omega t \tag{28}$$

$\sin\omega t$ に比例する項は、レーザーの動きから位相がずれていることを表している。また、$\omega \to$ 大にすると、$x(t) \to 0$ となるが、これはレーザーの振動が速過ぎて、コロイドが動かないことを表している。

(4) まとめと補足

○ まとめ

線形応答: 物理量 (応答)$x \propto$ 外場 f

線形応答はいろいろな現象で見られる。

時間遅れがあると、(2) 式が成り立つ。

線形ランジュバン方程式の場合、$\alpha(t)$ は (3) 式のように指数関数で表される。具体例として特に熱雑音の回路は、(19) 式で表される。

○ 補足: $\boxed{\alpha(t)\text{ は外場によらない}}$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{外場に比例}} = \int_{-\infty}^{t}\underbrace{\alpha(t-t')}_{\boxed{\text{外場を含まない}}}\underbrace{f(t')}_{\text{外場}}dt' \tag{29}$$

$\alpha(t)$ が外場を含むと $x(t)$ は外場の 2 乗に依存することになる。したがって、$\alpha(t)$ は $f(t)$ がどんな関数形でも変わらない。

付録: (11) 式を解いて、(12) 式を導く。

まず、$f(t) = 0$ の方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma x(t)$ を考えて、この方程式を解くと、

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \tag{30}$$

C は、時間によらない定数だが、本当に解きたいのは、(11) 式だから、$C = C(t)$ としてみる。$x(t) = C(t)\exp[-\gamma t]$ を (11) 式に代入すると、$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\exp[-\gamma t] - \gamma C(t)\exp[-\gamma t]$ だから、

$$\dot{C}(t)e^{-\gamma t} = f(t) \tag{31}$$

$$\dot{C}(t) = f(t)e^{\gamma t} \tag{32}$$

$$C(t) = \int^t f(t')e^{\gamma t'}dt' \tag{33}$$

積分は不定積分で、これから

$$x(t) = e^{-\gamma t}\int^t f(t')e^{\gamma t'}dt' \tag{34}$$

(34) 式は、特殊解で一般解は

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + \int^t e^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{35}$$

A は、$t = t_0$ の $x(t)$ の値から決まる定数で、$t = t_0$ のとき $x = x(t_0)$ としたから、(12) 式が求まる。

宿題:

46 (20 点) 授業やプリントで説明した例以外に、時間遅れがあるときの線形応答の具体例を挙げなさい。① どういう状況で、② 何の外場をかけると、③ どういう変数が、④ どう応答するか、⑤ 線形応答の式を書いて具体的に説明しなさい。また、⑥応答に時間後れがある原因を論じなさい。

47 (10 点)(2) 式は、線形応答の場合の一般的な式を表すが、応答 $x(t)$ が外場の 2 乗に比例する非線形応答の一般的な式はどうなるか。時間遅れを考慮して答えなさい。ただし、P1 の仮定は、すべて成り立っているとする。

48 (10 点) 宿題45 の (34) 式のように質量 m に比例する慣性項を無視しない場合を考える。例題のように $u(X) = k(X - x_0(t))^2/2$ とした時、$x(t) = \langle X(t)\rangle$ 対する線形応答の $\alpha(t)$ を計算しなさい。ただし、外場 $f(t)$ は $x_0(t)$ とする。

49 (15 点) 外場が $f(t) = \Re f_0 e^{i\omega t}$ の様に時間変化する時、t が 0 から $2\pi/\omega$ まで経った時の外場が系にした仕事

$$W = -\int_0^{2\pi/\omega} x(t)\dot{f}(t)dt \tag{36}$$

を ω、α''_ω と f_0 で表しなさい。ただし、$\Re$ は実部を表し、

$$\langle X(t)\rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{37}$$

が成り立ち、α''_ω は、$\alpha(t)$ のフーリエ変換 α_ω

$$\alpha_\omega = \int_0^\infty \alpha(t)e^{i\omega t}dt \tag{38}$$

の虚部を表す。この仕事は、**パワーロス**と呼ばれる。

50 (20 点) **クラマースクローニッヒの関係式**を調べ、レポートしなさい。ただし、記号は授業と同じものを使いなさい。