状態密度 $D(\epsilon)$ が

$$D(\epsilon) = \begin{cases} VD_0\epsilon^n & \epsilon > 0 \\ 0 & \epsilon \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

で与えられている理想ボース気体を $N(N >> 1)$ 考える。$n > 0$ で V は体積を表す。温度 T と N を固定して、V を減らすと $V = V_B$ で、ボース-アインシュタイン凝縮 (BEC) が起こった。グランドカノニカル分布を使って V_B を求めなさい。ただし、

$$\eta(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{e^x - 1} dx \tag{2}$$

で定義される関数 $\eta(y)$ を使いなさい。ここで、y は n で表される。また、内部自由度は無視し、ボルツマン定数は k_B とする。

今、$N >> 1$ なので、考えている体積も大きく、BEC が起こっても起こらなくても、次の公式が使える。

$$N = \int \frac{D(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon_s - \mu)} - 1} d\epsilon + N_0 \tag{3}$$

ここで、$\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$、$\mu$ は化学ポテンシャル、N_0 は基底状態の粒子数を表す。