2003年度非平衡物理学 授業ノート 2

2002.5.1 担当 吉森 明

§2. ブラウン運動の基礎II(フォッカー・プランク(FP)方程式)

目標 フォッカー・プランク(FP)方程式を理解する。特にランジュバン方程式との関係を知る。具体的には以下のことを分かる。

- 分布関数 $P(x,t)$ は時刻 t に X が $x \sim x+dx$ にある確率と関係し、FP方程式は、その時間変化を表す。
- FP方程式は下の仮定1、2、3を満たしたときランジュバン方程式から導ける。
- FP方程式は、1つの $\{R(t_i)\} = \{R(t_1), R(t_2), R(t_3), \ldots\}$ に対する分布関数 $h(x,t;\{R(t_i)\})$ の時間変化を考え、それを平均する事で得られる。
- 仮定2から $h(x,t;\{R(t_i)\})$ の時間微分を Δt だけ積分した後、Δt で割って $\Delta t \to 0$ にしても、元に戻らずFP方程式になる。特に x の2回微分が現れる。

目次 (1) FP方程式
(2) ランジュバン方程式からの導出
(3) FP方程式とランジュバン方程式が等価である条件
(4) 具体例
((5) FP方程式とランジュバン方程式の違い)

仮定

1. $X(t)$ と $R(t')$ が $t < t'$ で統計的に独立。
2. $\langle R(t) \rangle = 0$。 $\langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t-t')$。
3. $R(t)$ がガウス過程。

結論 ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{1}$$

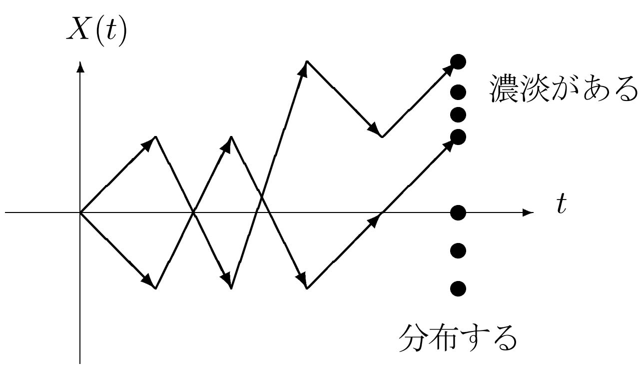
とFP方程式

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \{-\frac{\partial}{\partial x}F(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{D}{2}\}P(x,t) \tag{2}$$

は、等価。

(1) FP方程式

$X(t)$ は確率過程なので、$X(0)$ が同じでも $X(t)$ は分布する。

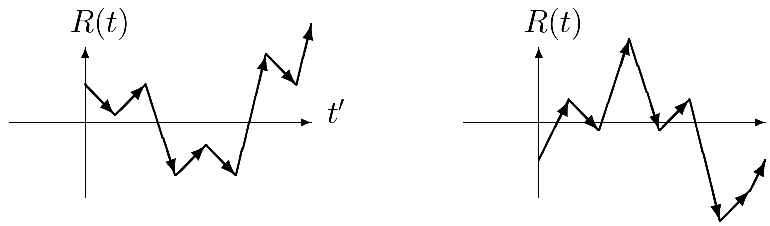


分布関数 $P(x,t)$:
時刻 t に X が $x \sim x+dx$
にある確率 $= P(x,t)dx$

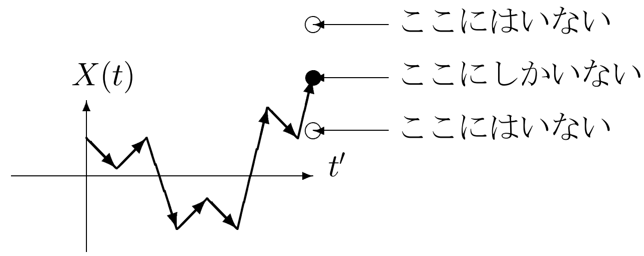
(2) ランジュバン方程式からの導出

○ $R(t)$ は分布する。

1 回目 $\{R(t_1), R(t_2), R(t_3), \ldots\}$ 　　2 回目 $\{R'(t_1), R'(t_2), R'(t_3), \ldots\}$



1 つの時系列 $\{R(t_i)\}$ に付いて分布関数を考える。$X(t)$ は、分布しない。



○ $h(x, t; \{R(t_i)\})$ の時間変化

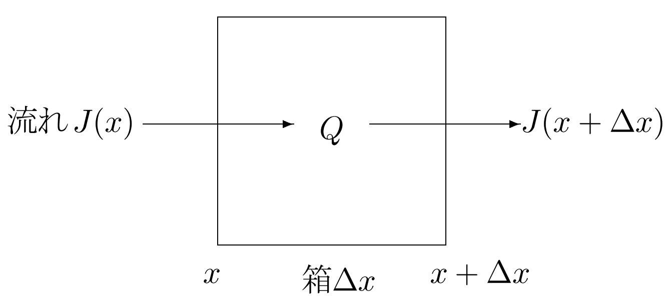
$h(x, t; \{R(t_i)\}) \equiv \delta(x - X(t, \{R(t_i)\}))$ の時、

$$\frac{\partial h(x, t; \{R(t_i)\})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\dot{X}(t, \{R(t_i)\})\delta(x - X(t, \{R(t_i)\})) \tag{3}$$

(宿題 5)。

これは、次の様な物理的な考察から導出できる。

● 連続の式



Q: 箱に入っている点の数 $= h\Delta x$

生成消滅しないということは、

$$\text{単位時間あたりの } Q \text{ の増加} = \text{外から内への流れ} - \text{内から外への流れ} \tag{4}$$

つまり、

$$\frac{dQ}{dt} = J(x) - J(x + \Delta x) \tag{5}$$

$Q = h\Delta x$ だから、両辺をΔxで割って、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{J(x) - J(x+\Delta x)}{\Delta x} = -\frac{\partial J}{\partial x} : \textbf{連続の式}\,(\textbf{生成消滅しない}) \tag{6}$$

非線型ランジュバン方程式 $\dot{X}(t, \{R(t_i)\}) = \dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x,t;\{R(t_i)\})}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\{F(X) + R(t)\}\delta(x - X(t, \{R(t_i)\})) & (7)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\{F(x) + R(t)\}h(x,t;\{R(t_i)\}) & (8) \end{aligned}$$

○ 今、$h(x,t;\{R(t)\})$ の時間変化を

$$\frac{\partial h(x,t;\{R(t_i)\})}{\partial t} = \Omega(x,t;R(t))h(x,t;\{R(t_i)\}) \tag{9}$$

と書く。ただし、

$$\Omega(x,t;R(t)) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\{F(x) + R(t)\} \tag{10}$$

$P(x,t)$ は、$\boxed{P(x,t) = \langle h(x,t;\{R(t_i)\})\rangle}$ と考える。ここで、$\langle\cdots\rangle$ は、$R(t)$ に対する平均。

(9) 式を t から $t+\Delta t$ まで積分すると、

$$h(x,t+\Delta t;\{R(t_i)\}) - h(x,t;\{R(t_i)\}) = \int_t^{t+\Delta t} \Omega(x,t_i;R(t'))h(x,t';\{R(t_i)\})dt' \tag{11}$$

同様の操作を繰り返すと (宿題6)、

$$\begin{aligned} &h(x,t+\Delta t;\{R(t_i)\}) - h(x,t;\{R(t_i)\})\\ &\quad= \{\int_t^{t+\Delta t}\Omega(x,t';R(t'))dt' + \int_t^{t+\Delta t}dt'\Omega(x,t';R(t'))\int_t^{t'}\Omega(x,t'';R(t''))dt''\\ &\qquad + (\Omega\text{の}\,3\,\text{次以上の項})\}h(x,t;\{R(t_i)\}) \end{aligned} \tag{12}$$

両辺平均して、$P(x,t) = \langle h(x,t;\{R(t_i)\})\rangle$ から、

$$\begin{aligned} &P(x,t+\Delta t) - P(x,t)\\ &\quad= \{\int_t^{t+\Delta t}\langle\Omega(x,t';R(t'))\rangle dt' + \int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t'}dt''\langle\Omega(x,t';R(t'))\Omega(x,t'';R(t''))\rangle\\ &\qquad + \langle\Omega\text{の}\,3\,\text{次以上の項}\rangle\}P(x,t) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで、

$$\begin{aligned} &\langle h(x,t;\{R(t_i)\})\Omega(x,t';R(t'))\Omega(x,t'';R(t''))\cdots\rangle\\ &\qquad = \langle h(x,t;\{R(t_i)\})\rangle\langle\Omega(x,t';R(t'))\Omega(x,t'';R(t''))\cdots\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

を使った。これは、**仮定**1から、$t < t'$ **で** $h(x,t;\{R(t_i)\})$ **と** $\Omega(x,t';R(t'))$ **が、統計的に独立**である事から分かる。

$\langle R(t)\rangle = 0$ ので、(10) 式から、

$$\int_t^{t+\Delta t}\langle\Omega(x,t';R(t'))\rangle dt' = \int_t^{t+\Delta t}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}F(x)\right\}dt' = -\Delta t\frac{\partial}{\partial x}F(x) \tag{15}$$

また、

$$\int_t^{\mathrm{t}+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \langle \Omega(x,t';R(t'))\Omega(x,t'';R(t''))\rangle$$
$$= \int_t^{\mathrm{t}+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}F(x) + \frac{\partial}{\partial x}D\delta(t'-t'')\frac{\partial}{\partial x} \right\} \tag{16}$$

(宿題6)。右辺１項目は、(宿題6)

$$\int_t^{\mathrm{t}+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}F(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\partial}{\partial x}F(x)\frac{\Delta t^2}{2} \tag{17}$$

2項目は、

$$\int_t^{t'} dt''\delta(t'-t'') = \frac{1}{2} \tag{18}$$

を使うと、

$$\int_t^{\mathrm{t}+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \left\{ \frac{\partial}{\partial x}D\delta(t'-t'')\frac{\partial}{\partial x} \right\} = \int_t^{\mathrm{t}+\Delta t} dt' \left\{ \frac{D}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} = \frac{D}{2}\Delta t\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{19}$$

Ωの3次以上の項

$$\int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 \cdots \int_t^{t_n} dt_n \langle \Omega(x,t_1;R(t_1))\Omega(x,t_2;R(t_2))\cdots\Omega(x,t_n;R(t_n))\rangle \tag{20}$$

は、Δt^2**の寄与しかしないと仮定した。(仮定3)**

結局、

$$P(x,t+\Delta t) - P(x,t) = \{-\frac{\partial}{\partial x}F(x)\Delta t + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{D}{2}\Delta t + (\Delta t^2\text{以上の項})\}P(x,t) \tag{21}$$

だから、Δtで割って、$\Delta t \to 0$とすると、(2)式が得られる。

宿題:

3(20点) 線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{22}$$

で、$\langle X(0)R(t)\rangle = 0, t > 0$の時、$\langle X(t)R(t')\rangle$を$t' > t, t' = t, t' < t$に分けて計算しなさい。ただし、$t$も$t'$も0より大きく、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$とする。

4(20点) 授業で扱った例以外に、ランジュバン方程式で記述できる現象を一つ以上探し、**ランジュバン方程式を書いて説明しなさい**。その場合のランダム力の実態は何か。

5(7点) (3)式をデルタ関数の性質を使って、導きなさい。

6(20点) (12)式、(16)式、(17)式を導きなさい。