2002.5.22 担当 吉森 明

§4-2. Wiener-Khinchinの定理

目標 Wiener-Khinchinの定理を理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 不規則な運動を特徴づけるもう1つの方法として、フーリエ変換がある。
- 結論2つ。
- 相関関数が指数関数の時は、I_ωはローレンツ型。
- 有限時間の定理に付いては、平均量である時間相関関数が1本の軌道から計算できるフーリエ変換と結びつくのが一見不思議だが、時間相関関数が時間平均で定義されているので、当然。
- 時系列のフーリエ変換は時間相関関数と完全に等価。

目次 (1) 時系列のフーリエ変換
(2) 無限時間の場合
(3) 有限時間の場合
(4) 具体例
(5) 定理の物理的な意味

仮定
1. 定常過程。
2. (3)については、時間相関関数を時間平均で定義。
3. さらに、次の量を定義する。

$$X_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{i\omega t}dt \tag{1}$$

$$I_\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X_\omega(T)^* X_\omega(T) \tag{2}$$

ただし、

$$X_\omega(T) = \int_0^T X(t)e^{i\omega t}dt \tag{3}$$

結論

$$\begin{array}{ll} \text{(2) 無限時間の場合} & \langle X_\omega X_{\omega'}\rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')\tilde{\psi}(\omega) \\ \text{(3) 有限時間の場合} & I_\omega = \tilde{\psi}(\omega) \end{array} \tag{4}$$

ここで、

$$\tilde{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\psi(t)dt \tag{5}$$

(2) 無限時間の場合

(1)式を使って

$$\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'}\langle X(t)X(t')\rangle \tag{6}$$

定常(仮定1)から、$\langle X(t)X(t')\rangle = \psi(t-t')$。だから、

$$\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'}\psi(t-t') \tag{7}$$

一般に、$f(t,t')=g(t-t')$となる関数をtとt'の両方でフーリエ変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\ e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}dt'e^{i\omega' t'}f(t,t')=2\pi\delta(\omega+\omega')\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega s}g(s)ds \tag{8}$$

となる事が知られているので、(宿題21参照)

$$\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle=2\pi\delta(\omega+\omega')\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega s}\psi(s)ds \tag{9}$$

(5)式を使うと、

$$\boxed{\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle=2\pi\delta(\omega+\omega')\tilde{\psi}(\omega)} \tag{10}$$

これは、$\langle X_\omega X_{\omega'}\rangle$は、$\omega'=-\omega$の時だけ値があり、**時間相関関数のフーリエ変換に比例する**ことを表している。

(3) 有限時間の場合

実際は有限の時間しかはかれないので、

$$X_\omega(T)=\int_0^T X(t)e^{i\omega t}dt \tag{11}$$

ここで、以下の様に**スペクトル密度 (パワースペクトル、スペクトル強度)** を定義する。

$$\boxed{I_\omega\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}X_\omega(T)^*X_\omega(T)} \tag{12}$$

この極限は、以下でみるように、時間相関関数のフーリエ変換があれば、存在する。また、**1つの軌道で計算できる。**

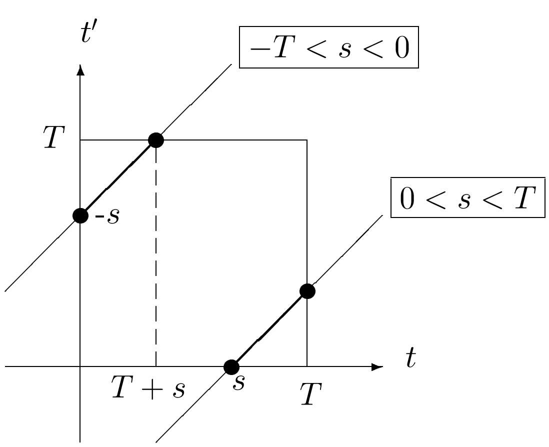
この定義に(11)式を代入する。

$$I_\omega=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt'e^{-i\omega t'}\int_0^T dte^{i\omega t}X(t)X(t') \tag{13}$$

t,t'を$t,s=t-t'$に変数変換する。ヤコビアンは

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{t'}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_t-\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)_{t'}\left(\frac{\partial s}{\partial t'}\right)_t=1\times 0-1\times(-1)=1 \tag{14}$$

積分範囲は、



だから、sについては2つにわけて、

$$\begin{aligned}I_\omega &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\{\int_0^T ds\ e^{i\omega s}\int_s^T X(t)X(t-s)dt\\ &\quad+\int_{-T}^0 ds\ e^{i\omega s}\int_0^{T+s}X(t)X(t-s)dt\}\end{aligned} \tag{15}$$

1項目は、tを$\tau=t-s$に変数変換すると、

$$\begin{aligned}I_\omega &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\{\int_0^T ds\ e^{i\omega s}\int_0^{T-s}X(\tau+s)X(\tau)d\tau\\ &\quad+\int_{-T}^0 ds\ e^{i\omega s}\int_0^{T+s}X(t)X(t-s)dt\}\end{aligned} \tag{16}$$

$\psi(t)$ に**時間平均の定義 (仮定 2) を使うと**、(16) 式の 1 項目と 2 項目の s の被積分関数は、$T \to \infty$ で、それぞれ$\psi(s)$ と$\psi(-s)$ となる。従って、

$$I_\omega = \int_0^\infty ds\ e^{i\omega s}\psi(s) + \int_{-\infty}^0 ds\ e^{i\omega s}\psi(-s) = \int_{-\infty}^\infty ds\ e^{i\omega s}\psi(s) = \tilde{\psi}(\omega) \tag{17}$$

ここで、$\psi(-s) = \psi(s)$ を使った。

宿題:

19(20 点) $X(t)$ が以下の線形ランジュバン方程式

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{18}$$

に従う時、授業で説明したように相関関数は、$\psi(t) = \langle X(t)X(0)\rangle = \langle X^2\rangle e^{-\gamma t}$ となる。これは、相関関数の性質$\dot{\psi}(0) = 0$ を満たさないように見える。なぜか説明しなさい。ただし、$X(t)$ は定常過程であるとする。

20(20 点) ブラウン粒子のランジュバン方程式を考える。

$$m\dot{V}(t) = -\lambda X(t) + R(t) \tag{19}$$

ただし、いつものように、ランダム力は、$\langle R(t)R(t')\rangle = D\delta(t-t')$、$\langle X(0)R(t)\rangle = 0 (t > 0)$ をみたす。さらにアインシュタインの関係式$\lambda k_B T = D/2$ が満たされているとき、$\langle V(t)V(t')\rangle$ を求めなさい。ただし、t もt'も正で、$t > t'$、$t = t'$、$t < t'$の場合に分けて答えること。

21(10 点) (8) 式を導きなさい。

22(20 点) (11) 式の下限を$-T$にして、

$$X_\omega(T) = \int_{-T}^{T} X(t)e^{i\omega t}dt \tag{20}$$

とした時でも、I_ωを (12) 式と同じ様に定義できる。この場合、Wiener-Khinchin の定理、すなわちI_ωと$\tilde{\psi}(\omega)$ の関係がどうなるか考えなさい。

23(30 点) 確率的に揺らぐ変数$X(t)$ を使って、$Y(t) \equiv \dot{X}(t) - \gamma X(t)$ なる変数$Y(t)$ が定義されている。$Y(t)$ が定常過程であれば、$\langle X(t_1)X(t_2)\rangle$ が$t_1 - t_2$だけの関数になることを示せ。ただし、$t \to \pm\infty$ で、$X(t) = 0$ とする。