2003年度非平衡物理学 授業ノート 9

2003.6.19 担当 吉森 明

§7. 輸送方程式

目標 輸送方程式について式の形と何に使えるか理解する。また、式の持っている物理的な意味も理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 輸送方程式の一般的な表式。
- 輸送方程式はゆらがずに緩和する現象を表す。
- 時間無限大で必ず緩和するので、不可逆過程の数学的な表現になっている。
- 多くの現象を表す。

目次 (1) §7〜§9の流れ
(2) 輸送方程式
(3) 数学的な性質
(4) 具体例

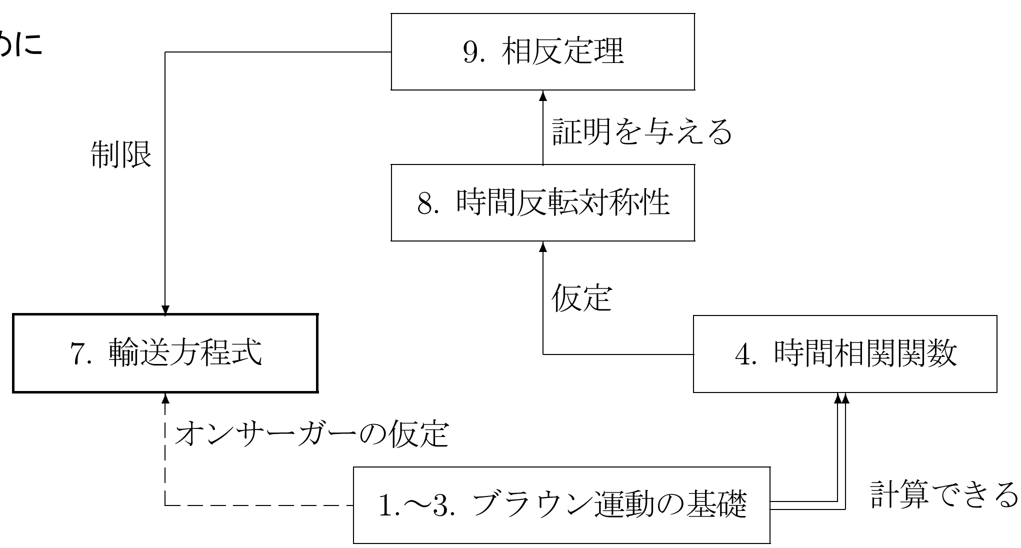
仮定 輸送方程式は一般的に次の様に書ける。

$$\dot{x}(t) = L' \frac{dS'(x)}{dx} \tag{1}$$

ただし、$S'(x)$ **は極値が1つしかなくて、それが最大。**その値が x の平衡値。さらに、$L' > 0$

結論 $t \to \infty$ で、必ず平衡値に達する。

(1) はじめに



(3) 数学的な性質

(1)式において、$S'(x)$ の時間変化を考える。

$$\frac{dS'(x)}{dt} = \dot{x}(t)\frac{dS'(x)}{dx} = L'\left(\frac{dS'(x)}{dx}\right)^2 \tag{2}$$

仮定より $L' > 0$ だから $\boxed{\dfrac{dS'(x)}{dt} \geq 0}$ $S'(x)$ は単調増加 (3)

だから、任意の x から始めて $dS'(x)/dt = 0$ となる $x_{\rm eq}$ まで、$S'(x)$ は増加しつづける。**仮定**から

$$t \to \infty \ S' \to S'(x_{\rm eq}) \ \text{つまり} \ x \to x_{\rm eq} \tag{4}$$

宿題:

38(20 点) 第 1 種揺動散逸定理

久保公式 $\alpha(t) = -\beta\langle \dot{X}(t)X(0)\rangle$ のフーリエ変換を考える。$\alpha(t)$ **は** $t \geq 0$ **でしか定義されていない**から、このままではフーリエ変換する事ができない。そこで、次の手順で久保公式の周波数領域版 (第 1 種揺動散逸定理) を証明しなさい。

(a) 次で定義されるフーリエ変換とラプラス変換

$$\tilde{\psi}(s) = \int_0^\infty \psi(t)e^{-st}dt \qquad \text{: ラプラス変換} \tag{5}$$

$$\psi(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \psi(t)e^{i\omega t}dt \qquad \text{: フーリエ変換} \tag{6}$$

の間に、

$$\psi(z) = 2\lim_{\epsilon\to+0} \Re\tilde{\psi}(-iz+\epsilon) \tag{7}$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、$\psi(t)$ は偶関数である。

(b) 久保公式が $t \geq 0$ で成り立つことを使って、久保公式をラプラス変換をし、それから (7) 式により、第 1 種揺動散逸定理

$$\alpha''_\omega = \frac{\omega\beta}{2}\psi_\omega \tag{8}$$

を導け。ただし、

$$\alpha_\omega = \int_0^\infty \alpha(t)e^{i\omega t}dt \qquad \psi(\omega) = \int_{-\infty}^\infty \langle X(t)X\rangle e^{i\omega t}dt \tag{9}$$

で、α''_ω は、α_ω の虚部を表す。

39(20 点) 久保公式や揺動散逸定理を使った例をまとめ、レポートにしなさい。外場や応答する変数を具体的に説明し、それに対応する久保公式や揺動散逸定理を書き説明しなさい。ただし、授業でやったものと 32 の問題で挙げたものを除く。

40(20 点) 粗視化された変数が幾つかある時の輸送方程式が

$$\dot{x}_\mu = \sum_\nu L'_{\mu\nu}\frac{\partial S'}{\partial x_\nu} \tag{10}$$

と書ける時、$L'_{\mu\nu} + L'_{\nu\mu}$ を要素に持つ行列が正値 (正定値) であれば、時間無限大で $x_\mu = x_\mu^{eq}$ となる事を示せ。ただし、S' は最大値を 1 つだけ持ち、それを x_μ^{eq} とする。

41(20 点) さらに、(宮崎ら 1996)

$$\dot{x}_\mu = \sum_\nu \{x_\mu, x_\nu\}\frac{\partial S'}{\partial x_\nu} + \sum_\nu L'_{\mu\nu}\frac{\partial S'}{\partial x_\nu} \tag{11}$$

の場合 (宮崎ら 1996) でも、同じ事がいえるのを示せ。ただし、$\{x_\mu, x_\nu\} = -\{x_\nu, x_\mu\}$ を仮定する。