2009 年度前期熱と波動論基礎 プリント (7 月 2 日)

担当 吉森 明

宿題の解答(6 月 25 日出題)

問題 カルノーの定理をエネルギー保存則でなく、サイクルでは熱量の出入りが 0 になるという熱量保存則 (間違った仮定) から導きなさい。ただし、効率の定義とトムソンの原理はそのまま使う。

解答 前回と同じように準静サイクルの $\boxed{\text{逆回し}}$ をつける。準静でないサイクルが高温の熱源から受け取る熱量を Q_h、生み出す仕事を R とすると、効率 η の定義から

$$R = \eta Q_h \tag{1}$$

逆回しの準静サイクルの効率を η_c、受け取る仕事を $R + W$、高温の熱源にくみ上げる熱量を Q'_h とすると、

$$R + W = \eta_c Q'_h \tag{2}$$

熱量の保存則から

$$Q_h = Q'_h \tag{3}$$

(1) 式と (3) 式を (2) 式に代入

$$\eta Q_h + W = \eta_c Q_h \tag{4}$$

$\eta_c - \eta$ について解くと

$$\eta_c - \eta = \frac{W}{Q_h} \tag{5}$$

トムソンの原理から $W \geq 0$、また $Q_h > 0$ だから

$$\eta_c - \eta \geq 0 \tag{6}$$

後は同様にしてカルノーの定理が導ける。

授業要点

3(c) エントロピー

(1) カルノーの定理とエントロピーの定義

○ エントロピーの定義

一般に準静等温過程の熱量を ΔQ とすると、エントロピー S は

$$S(V', T) - S(V, T) \equiv \frac{\Delta Q}{\Theta(T)} \tag{7}$$

と定義される。

(2) 問題設定と新しい仮定

○ エントロピーの増大則: $V, T \to V'T'$ の断熱変化について

$$\boxed{S(V', T') \geq S(V, T)} \tag{8}$$

○ 新しい仮定: $U_1 > U_2$ について

$$S(V, U_1) \geq S(V, U_2) \tag{9}$$

(3) 断熱準静過程

○ カルノーサイクル (準静): カルノーの定理から、2 つの準静断熱曲線の間の等温過程のエントロピー変化は、全ての温度で等しい

$$\Delta S_h = \Delta S_l \tag{10}$$

○ $T-V$ 図で準静断熱過程を表す曲線はたくさん書ける。そのうち 1 本を基準線として、その曲線上では S は一定と定義する。この時 (10) 式から、全ての**断熱準静曲線上でエントロピーは等しい**。

(4) 増大則の証明

P 点 $(T, V) \to$ S 点 (T', V') の断熱過程 (準静でなくても良い) で (8) 式を証明する。準静曲線上に A 点 (V', T_A) を取り、S→A→P→S のサイクルを考える。A→P→S では熱の出入りがないので、$Q=0$ となる。第 1 法則とトムソンの原理から $U_S \geq U_A$ が言え、新しい仮定 (9) 式から

$$S(V', T') \geq S(V', T_A) \tag{11}$$

A と P は同じ断熱準静曲線上にあるので、$S(V', T_A) = S(V, T)$ だから、(8) 式が言える。

(5) 可逆と不可逆過程

S が増加する過程は逆は起こらないので、$\boxed{\text{不可逆過程}}$という。S が変化しない過程は逆も起こるので、$\boxed{\text{可逆過程}}$という。

今日の宿題

エントロピー S が長さ L と温度 T の関数 $S(L, T)$ として $S = A \ln T - BL^2$ で表されるゴムがある。このゴムを、熱の出入り無しに、長さを L から L' に延ばした後の温度を T' とする。T' の値は延ばし方によって変わるが、ある温度よりは下がらない。その温度を求めなさい。