2009 年度前期熱と波動論基礎 宿題 (7 月 16 日出題) 解答

担当 吉森 明

[問題] 理想気体の代わりに

$$PV = nRT + \frac{B}{V} \tag{1}$$

$$U(V',T) = U(V,T) + \frac{B}{V'} - \frac{B}{V} \tag{2}$$

が成り立つ系で $\Theta(T)$ を計算しなさい。ただし、断熱準静過程で

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{V_1}{V_2} \tag{3}$$

は成り立つとする。

[解答] 問題で与えられている気体でカルノーサイクルをつくる。高温熱源の温度を T_h、低温熱源の温度を T_l とする。また、Q_h を高温熱源からもらう熱量、Q_l を低温熱源に捨てる熱量とすると、カルノーの定理から

$$\frac{Q_h}{Q_l} = \frac{\Theta(T_h)}{\Theta(T_h)} \tag{4}$$

Q_h を求めるために、温度 T_h で V_1 から V_2 に体積を増やすことを考える。第 1 法則 $\Delta U = W + Q_h$ から

$$Q_h = \Delta U - W \tag{5}$$

となる。$\Delta U = U(V_2, T) = U(V_1, T)$ を表すが、扱っている系は理想気体ではないので、この項は 0 にならない。(2) 式を使うと、

$$\Delta U = \frac{B}{V_2} - \frac{B}{V_1} \tag{6}$$

W は公式

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P(V, T_h) dV \tag{7}$$

に (1) 式を代入すると、

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{nRT_h}{V} + \frac{B}{V^2} \right) dV_1 \tag{8}$$

$$= -\left[nRT_h \ln V - \frac{B}{V} \right]_{V_1}^{V_2} \tag{9}$$

$$= -nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1} + \left(\frac{B}{V_2} - \frac{B}{V_1} \right) \tag{10}$$

(5) 式に (6) 式と (10) 式を代入すると、

$$Q_h = \left(\frac{B}{V_2} - \frac{B}{V_1} \right) - \left\{ -nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1} + \left(\frac{B}{V_2} - \frac{B}{V_1} \right) \right\} \tag{11}$$

$$= nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1} \tag{12}$$

Q_l も同様に計算できて、

$$Q_l = nRT_l \ln \frac{V_2'}{V_1'} \tag{13}$$

ここで、低温熱源では V_2' から V_1' の圧縮を考えた。(4) 式に代入し、(3) 式を使うと、

$$\frac{Q_h}{Q_l} = \frac{nRT_h \ln V_2/V_1}{nRT_l \ln V_2'/V_1'} = \frac{T_h}{T_l} \tag{14}$$

したがって、任意定数を a とすると $\Theta(T) = aT$ と求まる。