2005年度統計力学II 宿題10 (6月20日出題、7月4日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題1.] 完全反射の時、$\mathbf{k}=(\pi/L)\mathbf{n}$ $(n_x,n_y,n_z=0,1,2,\cdots\geq 0)$ となるが、このときの光の $D(\omega)$ を求めなさい。

[解答] 光子はボース粒子なので教科書P146の(10.2)が使えるので、粒子数 N は

$$N=2\sum_s f(\epsilon) \tag{1}$$

ただし、

$$\epsilon=\hbar\omega_s \tag{2}$$

$$f(\epsilon)=\frac{1}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{3}$$

で、s は固有振動の番号、ω_s は、s 番目の固有振動を表す。(1)式の右辺の2は、横波が2種類あるために必要。

$V\to\infty$ で積分に置き換えて

$$N=2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(\epsilon_{\mathbf{n}})dn_x dn_y dn_z \tag{4}$$

ただし、$\epsilon_{\mathbf{n}}=\hbar\omega_{\mathbf{n}}=\hbar ck_{\mathbf{n}}$、$k_{\mathbf{n}}=|\mathbf{k}_{\mathbf{n}}|$ とする。$\mathbf{k}$ に変数変換すると、

$$=2\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(\epsilon_k)\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z \tag{5}$$

ただし、$\epsilon_k=\hbar\omega_k=\hbar ck$ とした。**変数変換で必要な因子は** $(L/2\pi)^3$ **ではなく、**$(L/\pi)^3$ **となる**ことに注意しなさい。

次に極座標に変換するが、**積分の下限が各成分とも0なので、**θ,ϕ **の積分範囲に注意**して、

$$N=2\left(\frac{L}{\pi}\right)^3\int_0^\infty k^2dk\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int_0^{\pi/2}d\phi f(\epsilon_k) \tag{6}$$

$$=2\left(\frac{L}{\pi}\right)^3\int_0^\infty k^2dk\frac{\pi}{2}f(\epsilon_k) \tag{7}$$

$\omega = ck$ を使って、さらに $V = L^3$ だから

$$= \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{d\omega}{c} f(\epsilon_k) \tag{8}$$

これから、

$$D(\omega) = \frac{V}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} \tag{9}$$

これは、周期的境界条件と同じ。

[解説]　完全反射とは、波動方程式の解を $\psi(x, y, z)$ としたとき、

$$\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, L, z) = \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, L) = 0 \tag{10}$$

を満たす境界条件を言う。光の場合は、マクスエル方程式から波動方程式が導けるので、$\psi(x, y, z)$ は、電場とか磁場に相当する。

この境界条件を満たす波動方程式の解は、$\mathbf{r} = (x, y, z)$ として、

$$\psi(x, y, z) = A \sin(\mathbf{kr}) \tag{11}$$

ここで、A は任意の定数、$\mathbf{k}$ は、

$$\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}\mathbf{n} \qquad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

を満たす。