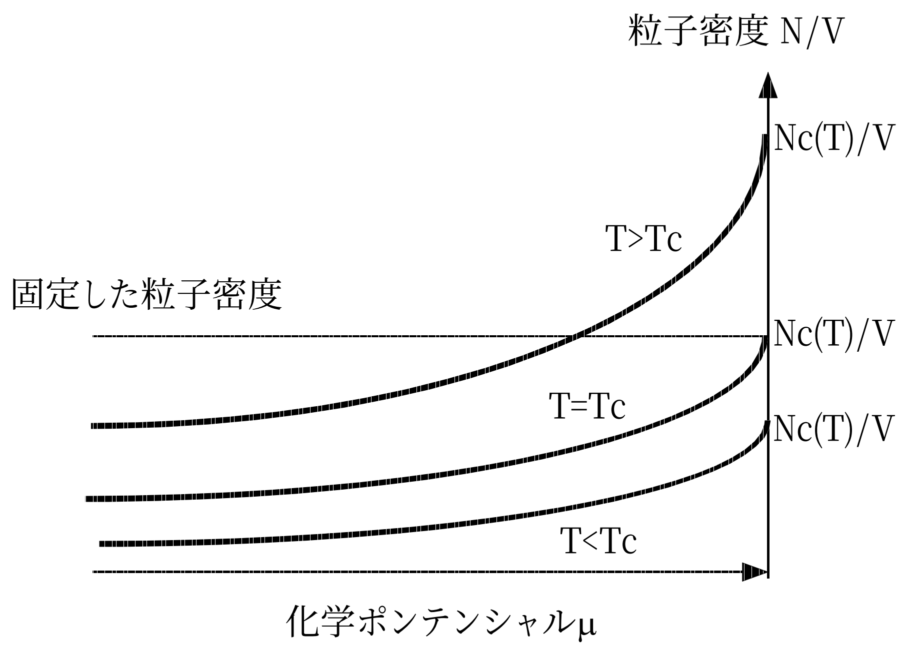
2005 年度統計力学 II 宿題 10 (6 月 20 日出題、6 月 27 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 締め切りを 7 月 4 日に延期しました。

[問題 2.]$N/V-\mu$ 曲線を T を変えてグラフに書き、教科書 p150、(10.26) 式の T_c で BEC が起こることを説明しなさい。

[解答] 粒子密度 N/V-化学ポテンシャル μ 曲線のグラフは、次のようになる。



図の縦軸との切片を $N_c(T)/V$ とすると、

$$\frac{N_c(T)}{V} = \int_0^\infty 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{1}$$

$$= \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\rm B}T)^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{2}$$

これは T の関数として与えられる。

温度を変えると、曲線全体が変る。特に (2) 式から $N_c(T)/V$ は、温度を下げると下に下がる。

今、与えられた N/V を固定して温度を高温から低温に下げる事を考える。図で T が高い時は、曲線と N/V 一定の線は、$\mu < 0$ で交わるので、化学ポテンシャルは、その 0 でない交点により与えられる。しかし、温度を下げると、曲線と N/V 一定の線は、$\mu < 0$ で交わらなくなり、温度と関係なく、化学ポテンシャル $\mu = 0$ が保たれる。これが、ボースアインシュタイン凝縮 (BEC) を示している。したがって、ちょうど BEC が起こる温度 T_c は、

$$
\begin{aligned}
\frac{N_c}{V} &= \frac{N_c(T_c)}{V} && (3)\\
&= \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}} T_c)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) && (4)
\end{aligned}
$$

これを T_c で解けば、(10.26) が得られる。