2005年度統計力学II 宿題2 (4月18日出題、4月25日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 1粒子のエネルギー固有状態が3個ある3準位系 (統計力学I試験問題参照) を考える。それぞれの状態のエネルギー固有値は、$0, \epsilon, 2\epsilon$ で、粒子はたがいに相互作用していない理想気体とする。

(a) 温度 T の熱溜に接しているとし、粒子がフェルミ統計、ボーズ統計、ボルツマン統計に従う場合の**カノニカル分布**における分配関数をそれぞれ求めなさい。ただし、粒子数は $N=3$ する。

(b) さらに、化学ポテンシャルを μ の粒子溜めに接するとして、**グランドカノニカル分布**の大分配関数を求めなさい。ただし、$\mu<0$ とする。

[解答](a)

フェルミ統計 微視的状態は、3つの準位にそれぞれ1個ずつ粒子が入る場合しかない。この時、エネルギーは、3ϵ だから、

$$Z = e^{-3\beta\epsilon} \tag{1}$$

ボース統計 k 番目の準位にはいる粒子の数を n_k として、微視的状態を、$\{n_1, n_2, n_3\}$ であらわすと、

$$\begin{array}{lllll} \{3,0,0\}, & \{2,1,0\}, & \{1,2,0\}, & \{2,0,1\}, & \{1,1,1\}, \\ \{0,3,0\}, & \{0,2,1\}, & \{1,0,2\}, & \{0,1,2\}, & \{0,0,3\} \end{array} \tag{2}$$

の10個ある。それぞれエネルギーは、

$$\begin{array}{cc} 0 & \{3,0,0\} \\ \epsilon & \{2,1,0\} \\ 2\epsilon & \{1,2,0\},\{2,0,1\} \\ 3\epsilon & \{1,1,1\},\{0,3,0\} \\ 4\epsilon & \{0,2,1\},\{1,0,2\} \\ 5\epsilon & \{0,1,2\} \\ 6\epsilon & \{0,0,3\} \end{array} \tag{3}$$

となるので、分配関数は、

$$Z = 1 + e^{-\beta\epsilon} + 2e^{-2\beta\epsilon} + 2e^{-3\beta\epsilon} + 2e^{-4\beta\epsilon} + e^{-5\beta\epsilon} + e^{-6\beta\epsilon} \tag{4}$$

ボルツマン統計　k 番目の粒子の準位を m_k として、微視状態を $\{m_1, m_2, m_3\}$ で表すと、それぞれのエネルギーを持つ微視的状態の数は

$$\begin{array}{cc} 0 & \{1,1,1\}\text{ で }1 \\ \epsilon & \{2,1,1\}\text{ 等 }3\text{ つ} \\ 2\epsilon & \{1,2,2\}\text{ 等 }3\text{ つ}, \{1,1,3\}\text{ 等 }3\text{ つ、合計 }6\text{ つ} \\ 3\epsilon & \{1,2,3\}\text{ 等 }6\text{ つ}, \{2,2,2\}\text{、合計 }7\text{ つ} \\ 4\epsilon & \{2,2,3\}\text{ 等 }3\text{ つ}, \{1,3,3\}\text{ 等 }3\text{ つ合計 }6\text{ つ} \\ 5\epsilon & \{2,3,3\}\text{ 等 }3\text{ つ} \\ 6\epsilon & \{0,0,3\}\text{ で }1 \end{array} \tag{5}$$

となるので、分配関数は、

$$Z = \frac{1}{3!}\left\{1 + 3e^{-\beta\epsilon} + 6e^{-2\beta\epsilon} + 7e^{-3\beta\epsilon} + 6e^{-4\beta\epsilon} + 3e^{-5\beta\epsilon} + e^{-6\beta\epsilon}\right\} \tag{6}$$

(b)

フェルミ統計　教科書　P113 の公式 (7.69) から、

$$\Xi = \prod_{k=1}^{3}(1 + ze^{-\beta\epsilon_k}) = (1+z)(1+ze^{-\beta\epsilon})(1+ze^{-2\beta\epsilon}) \tag{7}$$

ボース統計　教科書　P113 の公式 (7.68) から、

$$\Xi = \prod_{k=1}^{2}\frac{1}{1-ze^{-\beta\epsilon_k}} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-ze^{-\beta\epsilon}}\frac{1}{1-ze^{-2\beta\epsilon}} \tag{8}$$

ボルツマン統計　教科書 P113 の (7.63) 式の 2 行め

$$\Xi = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\cdots g(\{n_k\})\prod_k\left\{ze^{-\beta\epsilon_k}\right\}^{n_k} \tag{9}$$

教科書 (7.64) 式を代入すると

$$
= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \cdots \frac{1}{\prod_k n_k!} \prod_k \left\{ z e^{-\beta \epsilon_k} \right\}^{n_k} \tag{10}
$$

$$
= \prod_k \sum_{n_k} \frac{\left\{ z e^{-\beta \epsilon_k} \right\}^{n_k}}{n_k!} \tag{11}
$$

n_k は、0 から ∞ までの値をとるから

$$
= \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{ z e^{-\beta \epsilon_k} \right\}^{n}}{n!} \tag{12}
$$

指数関数の展開公式を使って

$$
= \prod_k \exp[z e^{-\beta \epsilon_k}] \tag{13}
$$

今は、3 準位だから

$$
= \exp[z] \exp[z e^{-\beta \epsilon}] \exp[z e^{-2\beta \epsilon}] \tag{14}
$$

[問題 2.] ルジャンドル多項式の定義から、$\hat{\boldsymbol{l}}^2$ の固有値が $2l+1$ 個に縮退していることを示せ。

[解答] ルジャンドル多項式の定義は、

$$
P_l^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sin^m \theta \left(\frac{d}{d\cos\theta} \right)^{l+m} \sin^{2l} \theta \tag{15}
$$

(量子力学 I の講義ノートを持っている人は、No4.P5(15) 式参照)

$\cos\theta$ の微分が $\sin^{2l}\theta$ にかかっているので、$0 \le l+m \le 2l$ が必要。つまり、$-l \le m \le l$ となる。したがって、それぞれの l に対し、m は、$-l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$ の値を取り、全部で $2l+1$ 個ある。