

2005 年度統計力学 II 宿題 5 (5 月 16 日出題、5 月 30 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書演習問題 p145^{*1}[6] を解きなさい。ただし容器は立方体とする。

[解答] (1) 授業でやった方法で説明する。(9.2) 式の級数を dn の 3 次元積分で近似して、 dk に変数変換し、さらにそれを極座標に変換するところまでは、同じ。つまり、

$$N = \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty f(\epsilon_k) k^2 dk \quad (1)$$

この積分で積分変数を波数の絶対値 k からエネルギー ϵ に変数変換する。波数とエネルギーは、運動量の関係から

$$\epsilon = A(\hbar k)^a \quad (2)$$

これから、 $d\epsilon = A\hbar^a a k^{a-1} dk$ だから、

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty f(\epsilon) k^2 \frac{d\epsilon}{A\hbar^a a k^{a-1}} = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty f(\epsilon) k^{3-a} \frac{d\epsilon}{A\hbar^a a} \quad (3)$$

$k = \epsilon^{1/a} / (A^{1/a} \hbar)$ を代入して

$$N = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty f(\epsilon) \frac{\epsilon^{3/a-1}}{(A^{1/a} \hbar)^{3-a}} \frac{d\epsilon}{A\hbar^a a} \quad (4)$$

したがって、

$$D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\epsilon^{3/a-1}}{A^{3/a} \hbar^3 a} \quad (5)$$

つまり、

$$f_a = \frac{1}{2\pi^2 A^{3/a} \hbar^3 a} \quad (6)$$

^{*1} P144 の間違い。

(2) フェルミエネルギーは、絶対零度のときの化学ポテンシャルだから、教科書 P135(9.12) 式と同じようにして

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} V f_a \epsilon^{(3-a)/a} d\epsilon = V f_a \frac{a}{3} \epsilon_F^{3/a} \quad (7)$$

逆に解けば、

$$\epsilon_F = \left(\frac{N}{V} \frac{3}{f_a a} \right)^{a/3} \propto V^{-a/3} \quad (8)$$

(3) これも教科書 P135(9.12) 式と同じようにして

$$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon V f_a \epsilon^{(3-a)/a} d\epsilon = V f_a \frac{a}{3+a} \epsilon_F^{3/a+1} \quad (9)$$

(4) 圧力は、公式

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} \quad (10)$$

で計算できるが、 $\epsilon_F \propto V^{-a/3}$ なので、 $V \epsilon_F^{3/a+1} \propto V^{1-(a/3)(3/a+1)} = V^{1-(1+a/3)} = V^{-a/3}$ だから、

$$P = - \frac{\partial}{\partial V} V f_a \frac{a}{3+a} \epsilon_F^{3/a+1} = \frac{a}{3} \frac{E}{V} \quad (11)$$

これから、 $3PV = aE$ が得られる。

[問題 2.] 教科書演習問題 p143[1] を解きなさい。

[解答] 略。教科書 P219 の演習問題解答を見て下さい。