

2005 年度統計力学 II 宿題 6 その 2 (5 月 23 日出題、6 月 6 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] ② C_V と P 、ヘルムホルツの自由エネルギー A 、エントロピー S を低温で展開して T^2 まで求めなさい。

訂正: 状態密度は、①の問題のものを使うのではなく、(9.10) を使って下さい。きちんと問題を書かなくて申し分けありません。

[解答] ②比熱 C_V : エネルギー E の展開は、授業でやった (教科書 P142(9.39))。これを温度で微分すると、

$$C_v = \frac{\partial E}{\partial T} \quad (1)$$

$$= \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[\frac{5\pi^2}{12} 2 \frac{k_B^2 T}{\epsilon_F^2} + \dots \right] \quad (2)$$

$$= N \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B^2 T}{\epsilon_F} + \dots \quad (3)$$

圧力 P : 圧力は、任意の温度で成り立つ公式 $PV = 2E/3$ を使って、

$$P = \frac{2E}{3V} \quad (4)$$

$$= \frac{2}{3V} \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (5)$$

$$= \frac{2N}{5V} \epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (6)$$

ヘルムホルツの自由エネルギー A : 教科書 P219 の演習問題解答にあるように、 $A = \mu N - PV$ (P10 表 1.1 参照) を使う。(6) 式から

$$PV = N \epsilon_F \left[\frac{2}{5} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (7)$$

P142(9.37) 式から引いて

$$A = \mu N - PV \quad (8)$$

$$= N\epsilon_F \left[1 - \frac{2}{5} - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 - \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (9)$$

$$= N\epsilon_F \left[\frac{3}{5} - \frac{3\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (10)$$

$$= \frac{3}{5} N\epsilon_F \left[1 - \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (11)$$

エントロピー S : P10 表 1.1 から、(10) を微分して、

$$S = -\frac{\partial A}{\partial T} \quad (12)$$

$$= -N\epsilon_F \left[-\frac{3\pi^2}{12} 2 \frac{k_B^2 T}{\epsilon_F^2} + \dots \right] \quad (13)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} N\epsilon_F \frac{k_B^2 T}{\epsilon_F^2} + \dots \quad (14)$$