2005 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 6 日出題、6 月 13 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 授業で説明したことを使って、与えられた N、V に対して転移温度を求めなさい。

[解答] 授業で説明したのは、

$$N_c \equiv \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{1}$$

とすると、$N < N_c$ で

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1} \tag{2}$$

$N \geq N_c$ では、

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} + N_0 = N_c + N_0 \tag{3}$$

ここで、N_0 は基底状態に入る粒子の数を表す。

上の説明は、温度 T を一定にして粒子数 N を変えているが、N を一定にして温度を変える事を考える。上の式で T を動かして値が変るものは N_c で、$D(\epsilon)$ に教科書 P147(10.8) 式を入れると、

$$N_c = \int 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{4}$$

$x = \beta\epsilon$ に変数変換すると、

$$\begin{aligned} N_c &= 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int\sqrt{xk_{\mathrm{B}}T}\frac{k_{\mathrm{B}}Tdx}{\exp[x]-1} && (5)\\ &= 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}\int\frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} && (6)\end{aligned}$$

(10.12) 式から、

$$\int\frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)b_{3/2}(1) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{7}$$

だから、$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使って、

$$N_c = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{8}$$

$$= V \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{9}$$

これは、温度 T とともに N_c が下がっていくことを表している。つまり、N を一定にして T を下げると、最初は、$N < N_c$ であっても、N_c が温度の 2 分の 3 乗で値が小さくなるために、ある温度で、$N > N_c$ となり、転移が起こる。

転移が起こる温度 T_c は、$N = N_c$ を満たす温度だから、

$$N = V \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T_c)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{10}$$

T_c について解くと、教科書 P150(10.26) になる。

[問題 2.] 2 次元平面の正方格子で BEC はどうなるか？

[解答] P144 演習問題 [5] で解いたように、2 次元平面では、状態密度は、$D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2 (\epsilon \geq 0)$ で表される。これを教科書 P147(10.5) 式に代入すると、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon] - 1} d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{mA}{\pi\hbar^2} \frac{d\epsilon}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon] - 1} \tag{11}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵ は充分小さいから $\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\epsilon] - 1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

したがって、いくら N を大きくしても、あるいは、T を小さくしても、(3) 式のように N_0 を必要としない。いつも、(2) 式のように書けるので、転移は起こらない。