2005 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 13 日出題、6 月 20 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] ①$T > T_c$ で μ を T_c の周りで展開し、$(T-T_c)^2$ まで求めよ。
② $T < T_c$ の時の S を求めなさい。

[解答] ① 最初に訂正させて下さい。

訂正: 授業では、μ の展開を

$$\text{(誤)} \qquad \mu = -\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T_c}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{1}$$

と書きましたが、これは間違っていました。(次元も合いません。) 正しくは、

$$\text{(正)} \qquad \mu = -\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T_c\lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{2}$$

です。謹んでお詫び申し上げます。

またまた訂正です。

訂正: 授業で、z が 1 に近い時、

$$\text{(誤)} \qquad b_{3/2}(z) \approx b_{3/2}(1) + \tilde{b}(z-1)^{1/2} \tag{3}$$

と書きましたが、これも間違いです。($\mu < 0$ なので、$z < 1$ だから、このままだとルートの中が負になります。) 正しくは、

$$\text{(正)} \qquad b_{3/2}(z) \approx b_{3/2}(1) + \tilde{b}(1-z)^{1/2} \tag{4}$$

です。いくつも間違って本当に申し分けありません。

(4) 式を $N/V = b_{3/2}(z)/\lambda_T^3$ に代入すると、

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda_T^3}\{b_{3/2}(1) + \tilde{b}(1-z)^{1/2}\} \tag{5}$$

$1-z$ について解くと $b_{3/2}(1)=\zeta(3/2)$ だから、

$$1-z=\frac{1}{\tilde{b}^2}\left\{\lambda_T^3\frac{N}{V}-\zeta(3/2)\right\}^2 \tag{6}$$

ここで $z<1$ で、右辺の符号に注意。教科書 P150(10.26) を使うと、

$$=\frac{\lambda_T^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left\{1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right\}^2 \tag{7}$$

右辺を T_c のまわりでテーラー展開する。$T=T_c+\Delta T$ として、

$$=\frac{\lambda_{T_c+\Delta T}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left\{1-\left(\frac{T_c+\Delta T}{T_c}\right)^{3/2}\right\}^2 \tag{8}$$

$$\approx\frac{\lambda_{T_c+\Delta T}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left\{1-\left(1+\frac{3}{2}\frac{\Delta T}{T_c}\right)\right\}^2 \tag{9}$$

ΔT^2 まで取ると

$$\approx\frac{\lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\frac{9}{4}\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{10}$$

また、μ は充分小さいとすると、$z=\exp[\beta\mu]\approx 1+\beta\mu$ だから、

$$\mu=-\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T\lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{11}$$

$$=-\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}(T_c+\Delta T)\lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{12}$$

ΔT^2 までで良いので、

$$=-\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T_c\lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \tag{13}$$

② $T<T_c$ の時の S を求めなさい。

[解答] ② 教科書 P154 の (10.37) にあるようにすればすぐ解けますが、ここでは、別の解き方をします。

まず、$T \leq T_c$ でエネルギー E は、

$$E = \frac{3V}{2} \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{14}$$

ここで、記号はすべて教科書のとおり使っている。定積比熱は、λ_T が $T^{-1/2}$ に比例していることから、

$$C_v(T) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{NV} = \frac{15V}{4} \frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{15}$$

また、P9(1.30) から

$$C_v(T) = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{NV} \tag{16}$$

だから、P7 の熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v(T)}{T'} dT' \tag{17}$$

C_v は、$T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5V}{2} \frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \frac{PV}{T} \tag{18}$$

[問題 2.] 教科書 p160 の演習問題 1 を解きなさい。

[解答] ここでは、教科書と別の解答を与える。

まず、エネルギー E を温度 T と体積 V、化学ポテンシャル μ の関数 $E = E(T, V, \mu)$ と考えると、転移点近傍では、μ は 0 に近いので、$\mu = 0$ のまわりでテーラー展開できる。

$$E = E(T, V, 0) + \left.\frac{\partial E(T, V, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} \mu + \cdots \tag{19}$$

一方、教科書 P149(10.18) から

$$E = \frac{3}{2}PV \tag{20}$$

教科書 P10 表 1.1 からグランドポテンシャル J は、$J = -PV$ だから、

$$E = -\frac{3}{2}J \tag{21}$$

$(\partial J/\partial \mu)_{T,V} = -N$ だから

$$\frac{\partial E(T,V,\mu)}{\partial \mu} = -\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{3}{2}J\right)_{T,V} = \frac{3}{2}N \tag{22}$$

これを (19) 式に代入すると、

$$E = E(T,V,0) + \frac{3}{2}N\mu + \cdots \tag{23}$$

μ についてもやはりこの問題の 1. で展開を計算していて、

$$\mu = -\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T_c\lambda_{T_c}^6}{\Gamma(-1/2)^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 = C\Delta T^2 \tag{24}$$

ただし、教科書 P196 付録 (F.5) からわかる $\tilde{b} = \Gamma(-1/2)$ を使った。これを (23) 式に代入すれば、

$$E = E(T,V,0) + \frac{3N}{2}C\Delta T^2 + \cdots \tag{25}$$

一方、$T \geq T_c$ では、

$$E = E(T,V,0) \tag{26}$$

だから、$T = T_c$ でエネルギーの 2 階微分、比熱の 1 階微分が不連続になるのがわかる。またそのとびは、絶対値で

$$3N|C| = 3N\frac{9}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}T_c\lambda_{T_c}^6}{\Gamma(-1/2)^2}\left(\frac{N}{V}\right)^2\left(\frac{1}{T_c}\right)^2 \tag{27}$$

$\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$、$\lambda_T = \hbar/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$ なので、

$$= \frac{27}{4} N \frac{k_{\mathrm{B}} T_c}{4\pi} \frac{\hbar^6}{(2\pi m k_{\mathrm{B}} T_c)^3} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{1}{T_c}\right)^2 \tag{28}$$

(10.26) から、

$$= \frac{27}{4} N \frac{k_{\mathrm{B}} T_c}{4\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{T_c}\right)^2 = \frac{27}{16\pi} N \frac{k_{\mathrm{B}}}{T_c} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2 \tag{29}$$