2004年度統計力学II 宿題10 (6月21日出題、6月28日提出)
解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 体積V温度Tの立方体の光子について① エネルギーがT^4に比例、② $PV = E/3$を示しなさい。

[解答] ① 光子は$\mu = 0$の理想ボース気体と見なせるから、教科書P147の(10.7)式で$z = 1$を代入すると、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon D(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \tag{1}$$

今、ωを角振動数とすると、$\epsilon = \hbar\omega$だから、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar\omega D(\omega)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \tag{2}$$

ここで、$D(\omega)$は、ωとω+$d\omega$の間にある状態数を表し、$D(\epsilon)d\epsilon = D(\omega)d\omega$となる。授業でもやったように、$\omega > 0$で

$$D(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V \tag{3}$$

教科書の$D(\omega)$が単位体積あたりだが、ここでは、Vをかけて定義する。また、$\omega < 0$では、$D(\omega) = 0$になる。これを代入すれば、

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 V}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \tag{4}$$

$x = \beta\hbar\omega$とすると、$\omega = \hbar^{-1} k_{\mathrm{B}} T x$だから、

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar^{-3}(k_{\mathrm{B}} T x)^3 V}{e^x - 1} \hbar^{-1} k_{\mathrm{B}} T dx & (5) \\ &= \frac{\hbar^{-3}(k_{\mathrm{B}} T)^4}{\pi^2 c^3} V \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx & (6) \end{aligned}$$

教科書P158の注から、

$$E = \frac{\hbar^{-3}(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\pi^2 c^3} V \frac{\pi^4}{15} \tag{7}$$

②普通の粒子の気体(エネルーギーが運動量の2乗に比例する) について、授業でやったように、光子についても2通りの方法で解ける。

[解法1:] エネルギーと同様に教科書P147の(10.6)式で$z=1$を代入すると、

$$P = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \tag{8}$$

積分変数をωに直して、(3)式を代入すると、

$$P = -k_{\mathrm{B}}T \int_0^{\infty} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega \tag{9}$$

部分積分して、

$$\begin{aligned} P &= -k_{\mathrm{B}}T \left\{ \left[\frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \right]_0^{\infty} \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} \frac{\beta\hbar e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} d\omega \right\} \qquad (10) \\ &= k_{\mathrm{B}}T \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} \frac{\beta\hbar e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} d\omega \qquad (11) \\ PV &= k_{\mathrm{B}}TV \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} \frac{\beta\hbar}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \qquad (12) \\ &= V \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} \frac{\hbar}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega \qquad (13) \end{aligned}$$

(4)式と比べると、$PV = E/3$が示せる。

[解法2:] 部分積分せずに変数変換$x = \beta\hbar\omega$

$$PV = -k_{\mathrm{B}}TV \int_0^{\infty} \frac{\hbar^{-2}(k_{\mathrm{B}}Tx)^2}{\pi^2 c^3} \ln(1 - e^{-x}) \hbar^{-1} k_{\mathrm{B}}T dx \tag{14}$$

つまり、βPVは、βの-3乗に比例する。
熱力学の公式(教科書P10表1.2)から、

$$E = -\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\beta PV\right)_{Vz} = 3PV \tag{15}$$

[問題 2.(余裕があれば)] P161演習問題[3]

[解答] プランクの輻射式(教科書P157(10.44)式)

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \tag{16}$$

Tが大きい時、βは小さくなるので、$e^{\beta\hbar\omega} \sim 1 + \beta\hbar\omega$だから

$$u(\omega) \sim \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{\beta\hbar\omega} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{17}$$

Tが小さい時、βは大きくなるので、

$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3 e^{-\beta\hbar\omega} \tag{18}$$