2004年度統計力学II 宿題9 (6月14日出題、6月21日提出)
解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 定積比熱の温度微分の不連続を示せ。とびを求めよ。
[ヒント]

$$E = \frac{3}{2}PV \tag{1}$$

[解答] 授業で、転移点近傍のPの近似式を求めた。

$$P \approx P_0 + \frac{N_e}{V}\mu \tag{2}$$

(1) 式から、Eについても同様の近似式

$$E \approx E_0 + \frac{3N_e}{2}\mu \tag{3}$$

が導ける。ただし、E_0は、$T < T_c$のエネルギーを表す。

μについてもやはり授業中に

$$\mu = -k_{\mathrm{B}}T_c \left\{ \frac{3}{2}\frac{1}{\Gamma(-1/2)}\frac{\lambda_{T_c}^3}{V}\frac{N}{T_c} \right\}^2 \Delta T^2 = C\Delta T^2 \tag{4}$$

を示した。ここで、$\Delta T^2 = T - T_c$を表す。これを(3) 式に代入すれば、

$$E \approx E_0 + \frac{3N_e}{2}C\Delta T^2 \tag{5}$$

となる。

転移点での不連続を知りたいので、$E - E_0$のT_c近傍の振る舞いがわかれば良い。Tは充分T_cに近いので、$E-E_0$を$T = T_c$のまわりでテーラー展開する。$N_e = \zeta V/\lambda_T^3 = N_e(T)$ なので、

$$E - E_0 \approx \frac{3N_e(T_c)}{2}C\Delta T^2 + \Delta T^3\text{の項} \tag{6}$$

教科書P150に載っているT_cの定義(10.26)式から導ける、(10.29)式から$N_e(T_c)=N$なので、

$$E-E_0 \approx \frac{3N}{2}C\Delta T^2+\Delta T^3\text{の項} \tag{7}$$

これを温度について2階微分をすれば、比熱の温度微分のとびが出る。

$$\lim_{T-T_c\to+0}\frac{\partial C_v}{\partial T}-\lim_{T-T_c\to-0}\frac{\partial C_v}{\partial T}=2\frac{3N}{2}C=3NC \tag{8}$$

[問題 2.(余裕があれば)] P160演習問題[2]

訂正: Rb**の密度は重量密度ではなく、数密度です。したがって、**$2\times10^{13}g{\cdot}cm^{-3}$**は間違えで、正しくは、**

$$2\times10^{13}cm^{-3}$$

です。

[解答] 問題にあるように原子量は87だから、質量mは、$N_A=6.02\times10^{23}$をアボガドロ数とすると、

$$m=\frac{87}{N_A}=1.45\times10^{-22}\mathrm{g}=1.45\times10^{-25}\mathrm{kg} \tag{9}$$

N/Vは、m^{-3}に直して、

$$\frac{N}{V}=2\times10^{19}\mathrm{m}^{-3} \tag{10}$$

転移温度は、教科書P150(10.26)式から

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{h^2}{2\pi m k_\mathrm{B}}\left(\frac{N}{2.61V}\right)^{2/3} && (11)\\ &= \frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\pi\times1.45\times10^{-25}\times1.38\times10^{-23}}\left(\frac{2\times10^{19}}{2.61}\right)^{2/3} && (12)\\ &= 1.36\times10^{-7} && (13)\end{aligned}$$