2004年度統計力学II 宿題4 (5月10日出題、5月17日提出)
解答

担当 吉森 明、TA 森 史

[問題] 1粒子のエネルギー固有状態が2個しかない2準位系(教科書P44参照)を考える。粒子がフェルミ統計、ボーズ統計、ボルツマン統計に従う場合の**カノニカル分布**における分配関数をそれぞれ求めなさい。ただし、エネルギー固有値は、ϵと$-\epsilon$とし、粒子数は$N = 2$、温度をTとする。さらに、化学ポテンシャルをμとして、**グランドカノニカル分布**の大分配関数を求めなさい。

[解答] <u>カノニカル分布 $N = 2$</u>

ボルツマン統計

$$Z = \frac{1}{2!}(\exp(-2\beta\epsilon) + 2 + \exp(+2\beta\epsilon)) \tag{1}$$

フェルミ統計

$$Z = \exp(-\beta(\epsilon - \epsilon)) = 1 \tag{2}$$

ボーズ統計

$$Z = \exp(-2\beta\epsilon) + 1 + \exp(+2\beta\epsilon) \tag{3}$$

<u>グランドカノニカル分布 μ</u>

$$\Xi = \Pi\Xi_k = \Xi_{+\epsilon}\Xi_{-\epsilon} \quad (2\text{準位系}) \tag{4}$$

ボルツマン統計

$$\Xi_{+\epsilon} = \Sigma_{n_{+\epsilon}}^{\infty}\frac{1}{n_{+\epsilon}!}\exp[-\beta(\epsilon - \mu)n_{+\epsilon}] = \exp[\exp[-\beta(\epsilon - \mu)]] \tag{5}$$

$$\Xi_{+\epsilon} = \Sigma_{n_{-\epsilon}}^{\infty} \frac{1}{n_{-\epsilon}!} \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)n_{-\epsilon}] = \exp[\exp[-\beta(-\epsilon - \mu)]] \tag{6}$$

$$\Xi = \exp[\exp[-\beta(\epsilon - \mu) + \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)] \tag{7}$$

フェルミ統計

$$\Xi_{+\epsilon} = \Sigma_{n_{+\epsilon}} \exp[-\beta(\epsilon - \mu)n_{+\epsilon}] = 1 + \exp[-\beta(\epsilon - \mu)] \tag{8}$$

$$\Xi_{-\epsilon} = \Sigma_{n_{-\epsilon}} \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)n_{-\epsilon}] = 1 + \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)] \tag{9}$$

$$\Xi = (1 + \exp[-\beta(\epsilon - \mu)])(1 + \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)]) \tag{10}$$

ボーズ統計

$$\Xi_{+\epsilon} = \Sigma_{n_{+\epsilon}}^{\infty} \exp[-\beta(\epsilon - \mu)n_{+\epsilon}] = (1 - \exp[-\beta(\epsilon - \mu))^{-1} \tag{11}$$

$$\Xi_{-\epsilon} = \Sigma_{n_{-\epsilon}}^{\infty} \exp[-\beta(-\epsilon - \mu)n_{-\epsilon}] = (1 - \exp[-\beta(-\epsilon - \mu))^{-1} \tag{12}$$

$$\Xi = (1 - \exp[-\beta(\epsilon - \mu))^{-1}(1 - \exp[-\beta(-\epsilon - \mu))^{-1} \tag{13}$$