2004年度統計力学II 宿題5 (5月17日出題、24日提出) 解答

吉森 明

[問題] 教科書P144演習問題[6]

[解答] (1) エネルギースペクトルは、$\epsilon = Ap^a$で与えられているので、エネルギー固有値は、$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$とすると、

$$\epsilon_n = A(\hbar k_n)^a \tag{1}$$

逆に解くと、

$$k_n \quad = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{\epsilon_n}{A}\right)^{1/a} = k(\epsilon_n) \tag{2}$$

状態密度$D(\epsilon)$を求めるためには、まず状態数$\Sigma(\epsilon)$を求めなければならない。$\Sigma(\epsilon)$は、教科書P134-135で説明したのと同じように、半径$k(\epsilon)$の球内の点の数で与えられる。

$$\Sigma(\epsilon) = \frac{4\pi}{3}k(\epsilon)^3\left(\frac{gV}{8\pi^3}\right) = \frac{4\pi}{3\hbar^3}\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{3/a}\left(\frac{gV}{8\pi^3}\right) \tag{3}$$

これをϵで微分すれば、状態密度が得られる。

$$D(\epsilon) = \frac{d\Sigma(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{4\pi}{a\hbar^3}\frac{\epsilon^{3/a-1}}{A^{3/a}}\left(\frac{gV}{8\pi^3}\right) = V\frac{4\pi g}{ah^3}\frac{1}{A^{3/a}}\epsilon^{3/a-1} \tag{4}$$

$f_a = 4\pi g/(ah^3A^{3/a})$とすれば、$D(\epsilon) = Vf_a\epsilon^{(3-a)/a}$が得られる。ただし、$g$はあってもなくても良い。

(2) フェルミエネルギーは、絶対零度のときの化学ポテンシャルだから、教科書P135(9.12)式と同じようにして

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} Vf_a\epsilon^{(3-a)/a}d\epsilon = Vf_a\frac{a}{3}\epsilon_F^{3/a} \tag{5}$$

逆に解けば、

$$\epsilon_F = \left(\frac{N}{V}\frac{3}{f_a a}\right)^{a/3} \propto V^{-a/3} \tag{6}$$

(3) これも教科書P135(9.12)式と同じようにして

$$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon)d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon Vf_a\epsilon^{(3-a)/a}d\epsilon = Vf_a\frac{a}{3+a}\epsilon_F^{3/a+1} \tag{7}$$

(3) 圧力は、公式

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{8}$$

で計算できるが、$\epsilon_F \propto V^{-a/3}$なので、$V\epsilon_F^{3/a+1} \propto V^{1-(a/3)(3/a+1)} = V^{1-(1+a/3)} = V^{-a/3}$だから、

$$P = -\frac{\partial}{\partial V} V f_a \frac{a}{3+a} \epsilon_F^{3/a+1} = \frac{a}{3}\frac{E}{V} \tag{9}$$

これから、$3PV = aE$が得られる。