2004年度統計力学II 宿題8 (6月7日出題、6月14日提出)
解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書P152(10.29)(10.30) を導きなさい。

[解答] 授業では、Tを一定にしてNを動かして説明した。つまり、

$$N_c = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{1}$$

とすると、$N < N_c$で

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1} \tag{2}$$

$N > N_c$では、

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} + N_0 = N_c + N_0 \tag{3}$$

となる。ここで、N_0は基底状態に入る粒子の数を表す。

この問題では、Nを一定にしてTを動かす。上の式でTを動かして値が変るものはN_cで、$D(\epsilon)$ に教科書P147(10.8) 式を入れると、

$$N_c = \int 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{4}$$

$x = \beta\epsilon$に変数変換すると、

$$\begin{aligned} N_c &= 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int\sqrt{xk_\mathrm{B}T}\frac{k_\mathrm{B}T dx}{\exp[x]-1} && (5)\\ &= 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_\mathrm{B}T)^{3/2}\int\frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} && (6)\end{aligned}$$

(10.12) 式から、

$$\int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) b_{3/2}(1) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{7}$$

だから、$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使って、

$$\begin{aligned} N_c &= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) && (8) \\ &= V \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) && (9) \end{aligned}$$

(10.26) 式で定義される T_c を

$$\left(\frac{2\pi m k_{\mathrm{B}} T_c}{h^2}\right)^{2/3} V\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = N \tag{10}$$

と変形すると、N_c は、

$$N_c = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{2/3} \tag{11}$$

と書ける。これは、温度 T とともに N_c が下がっていくことを表している。つまり、N を一定にして T を下げると、最初は、$N < N_c$ であっても、N_c が温度の 2 分の 3 乗で値が小さくなるために、ある温度で、$N > N_c$ となり、転移が起こる。その温度は、(11) 式から T_c だ。

まとめると、

$$\begin{aligned} T &> T_c \quad \text{のとき} \quad N < N_c && (12) \\ T &< T_c \quad \text{のとき} \quad N > N_c && (13) \end{aligned}$$

(12) 式のときは、粒子数 N は (2) 式が成り立って、全て $\epsilon > 0$ の励起状態に粒子がある。つまり、励起状態の粒子数 N_e は、$N_e = N$ となり、基底状態の粒子数 N_0 は、$N_0 = 0$ になる。(13)

式のときは、粒子数Nは(3)式が成り立って、基底状態と励起状態に分かれる。ただし、$N_e = N_c$となる。この時、基底状態の粒子数は、$N_0 = N - N_e$より計算できる。

以上のことをまとめると、(10.29)(10.30)が得られる。

[問題2.(余裕があれば)] 2次元平面の正方形では、BE転移はどうなるか。

[解答] P144演習問題[5]で解いたように、2次元平面では、状態密度は、$D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2 (\epsilon \geq 0)$ で表される。これを教科書P147(10.5)式に代入すると、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon] - 1} d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{mA}{\pi\hbar^2} \frac{d\epsilon}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon] - 1} \tag{14}$$

この積分は$z \to 1$で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵは充分小さいから$\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$で、$(\exp[\beta\epsilon] - 1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$に比例する。このような被積分関数を0から積分すると対数で発散することが知られている。

したがって、いくらNを大きくしても、あるいは、Tを小さくしても、(3)式のようにN_0を必要としない。いつも、(2)式のように書けるので、転移は起こらない。