

2006 年度統計力学 II 授業ノート 2
角運動量とスピン

2006.6.14 担当 吉森 明

1 角運動量^{*1}

角運動量は、ベクトル \hat{l} で、量子力学 I では、微分演算子として定義した。極座標で書くと、

$$\hat{l}_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (1)$$

$$\hat{l}_y = i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (2)$$

$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3)$$

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2 \quad (4)$$

固有値、固有関数

\hat{l}^2 と \hat{l}_z は、交換可能なので、同時固有関数を持つ。その固有関数は名前がついていて、

$$Y_l^m(\theta, \phi) : \text{球面調和関数} \quad (5)$$

添え字 l と m は、固有値と関係している。つまり、

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 Y_l^m(\theta, \phi) &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \\ \hat{l}_z Y_l^m(\theta, \phi) &= \hbar m Y_l^m(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

縮退度(固有値が同じ値の状態の数)

$Y_l^m(\theta, \phi)$ は、2つの整数の組 (l, m) で指定される。ただし、 l は、マイナスはなく、 $l = 0, 1, 2, \dots$ となる。 m は l によって取れる範囲が違う。つまり、 $-l \leq m \leq l$ だから、 m は、 $2l + 1$ 個の値を取る。例えば、 $l = 1$ のとき、 $m = -1, 0, 1$ で、 m は 3 つ。

\hat{l}^2 の固有値は、 l だけで決まって、 m によらない。 $Y_l^m(\theta, \phi)$ と $Y_l^{m'}(\theta, \phi)$ は、同じ固有値 $l(l+1)$ を与える。 m は $2l + 1$ この値をとるので、

^{*1} 量子力学 I 講義ノート No. 4 P7-P10 を参照のこと。

\hat{l}^2 の固有値は $2l + 1$ 個に縮退している

中心力ポテンシャル $V(r)$ での運動: ハミルトニアンは、

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) = \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\hat{l}^2}{r^2} \right] + V(r) \quad (7)$$

と書けるから、回転の部分のエネルギー固有値 ϵ_l は、 $I = mr^2$ として、

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \quad (8)$$

また、エネルギーの縮退は、 \hat{l}^2 の固有値の縮退と同じ。したがって、

$2l + 1$ 個に縮退

2 スピン*2

スピンは内部自由度と言われる。

古典力学では 1 つの粒子の状態は位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と運動量ベクトル $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ で表される。これは、1 粒子の自由度は位置とその運動量しかない事を示している。

ところが、量子力学では、位置やその運動量だけでは説明できない実験事実がある。そこで、新しい自由度として、スピン自由度が導入された。スピン自由度はスピン $\hat{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ という物理量として観測される。つまり、量子力学では

1 つの粒子の自由度として、位置 \mathbf{r} とスピン \hat{S} の 2 つを考えなければならない。

この事から波動関数は、位置の自由度だけでなく、スピンも引数に含めなければならない。したがって、統計力学において状態数や分配関数の計算に考える必要がある。

*2 量子力学 II 5 月 25 日、6 月 1 日のノート参照。

スピンの性質

1. 角運動量 \hat{l} と同じ数学的構造: \hat{S} は物理量なので、演算子だから、

$$\hat{l}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (9)$$

$$\hat{l}_z Y_l^m(\theta, \phi) = m Y_l^m(\theta, \phi) \quad \text{ただし、} -l \leq m \leq l \quad (10)$$

↓

$$\hat{S}^2 v(s_z) = s(s+1) v(s_z) \quad (11)$$

$$\hat{S}_z v(s_z) = s_z v(s_z) \quad \text{ただし、} -s \leq s_z \leq s \quad (12)$$

ここで、 $v(s_z)$ はスピンの固有関数を表す。スピンの固有関数は、位置の関数では無い。(12) 式から、スピンも 2s + 1 個に縮退している。

2. 古典的な類推ができない。

角運動量—古典的な自由度 θ, ϕ : (1) ~ (3) 式

↓

スピンにはこういう対応は無い。古典的な自由度は対応しない。

通常 1 つの粒子はスピンの値 (\hat{S}^2 の固有値 s) を 1 つしかとらない。

角運動量 例えば 1 つの電子は $J = 0, 1, 2, \dots$ どれでもとれる。

↓

スピン 電子 1/2、中性子 1/2、陽子 (水素原子の核) 1/2 — フェルミ粒子
 光子 1、重水素の原子核 1 (スピンの合成) — ボース粒子

ハミルトニアンに \hat{S} が含まれていない時、

→ エネルギー固有状態は、 $2S + 1$ に縮退する。

したがって、状態密度もその分増える。これは、ちょうど光子において横波の偏りの分を 2 倍するのと似ている。教科書 P135 の g は、

$$g = 2S + 1 \quad (13)$$

特に電子は、 $S = 1/2$ だから $g = 2$ となる。

宿題 (6 月 21 日締め切り)

1. 授業で導いた光子の $D(\omega)$ を使って、体積 V の箱に閉じ込めた光子の全エネルギーを計算しなさい。
2. 教科書 P159(10.51) 式はどのような考えに基づいているかを説明しなさい。特に ω が小さいところでは厳密なことを示せ。(文献を調べても良いが、参考にした文献は明記する事。)