2006 年度統計力学 II 宿題 3 (4 月 26 日出題、5 月 17 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 面積 A の 2 次元平面に閉じ込められた質量 m のフェルミ粒子に対して、絶対零度でのフェルミエネルギー ϵ_F、エネルギー E を A と粒子数 N の関数として求めなさい。ただし、内部自由度は考えなくて良い。

[解答] 1 粒子のハミルトニアンは、

$$\hat{h} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

固有関数 $\phi_{\mathbf{n}}(x,y)$、固有値 $\epsilon_{\mathbf{n}}$ とすると、

$$\hat{h}\phi_{\mathbf{n}}(x,y) = \epsilon_{\mathbf{n}}\phi_{\mathbf{n}}(x,y) \tag{2}$$

ただし、$\phi_{\mathbf{n}}(x,y)$ は周期的境界条件

$$\phi_{\mathbf{n}}(x+L,y) = \phi_{\mathbf{n}}(x,y+L) = \phi_{\mathbf{n}}(x,y) \tag{3}$$

を満たす。

その時、(2) 式を解くと、

$$\phi_{\mathbf{n}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L^2}}e^{i\mathbf{k_n r}} \qquad \epsilon_{\mathbf{n}} = \frac{\hbar^2}{2m}|\mathbf{k_n}|^2 \tag{4}$$

ここで、

$$\mathbf{k_n} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \tag{5}$$

ただし、$\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ で、$n_x = 0, \pm1, \pm2\ldots, n_y = 0, \pm1, \pm2\ldots$

つまり、3 次元の時と同じように波数で状態を特徴づけられることがわかる。そこで、k_x を x 軸に、k_y を y 軸にしたの 2 次元空間 (波数空間) を考え、状態をその空間の中の点に対応させる。例えば、$n_x = 1, n_y = 2$ の状態は、$(k_x, k_y) = (2\pi/L, 4\pi/L)$ の点に対応させる。

状態密度は、ϵ〜$\epsilon + d\epsilon$ の状態の数だから、0〜$\epsilon + d\epsilon$ の状態の数から 0〜ϵ の状態の数を引けば良い。$\Sigma(\epsilon)$ を 0〜ϵ の状態とすると、

$$D(\epsilon)d\epsilon = \Sigma(\epsilon + d\epsilon) - \Sigma(\epsilon) \approx \frac{d\Sigma(\epsilon)}{d\epsilon}d\epsilon \tag{6}$$

したがって、

$$D(\epsilon) = \frac{d\Sigma(\epsilon)}{d\epsilon} \tag{7}$$

$\Sigma(\epsilon)$ は、$(\hbar^2/2m)|\mathbf{k}^2| \leq \epsilon$ にある点を数えれば良いので、

$$\begin{aligned}
\Sigma(\epsilon) &= \text{半径}\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}\text{の円の内側にある点 (状態) の数} \qquad (8)\\
&= \frac{\text{円の面積}}{(\text{間隔})^2} \qquad (9)\\
&= \frac{\pi\left(\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \pi\left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} = \frac{mA\epsilon}{2\pi\hbar^2} \qquad (10)
\end{aligned}$$

したがって、(7) 式から

$$D(\epsilon) = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} \tag{11}$$

ϵ によらない定数になる。ただし、(11) 式が成り立つのは $\epsilon \geq 0$ だけで、$\epsilon < 0$ では、$D(\epsilon) = 0$ となる。

状態密度が計算できたので、教科書 (9.6)、(9.7) 式に代入して、絶対零度である事を考慮し、(9.11) 式を使うと、

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)d\epsilon = \frac{mA}{2\pi\hbar^2}\epsilon_F \qquad (12)\\
E &= \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon)\epsilon d\epsilon = \frac{mA}{2\pi\hbar^2}\frac{\epsilon_F^2}{2} \qquad (13)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\epsilon_F &= \frac{2\pi\hbar^2}{mA}N \qquad (14)\\
E &= \frac{1}{2}N\epsilon_F = \frac{\pi\hbar^2}{mA}N^2 \qquad (15)
\end{aligned}$$

[問題 2.] 教科書演習問題 p143[1] を解きなさい。

[解答] 略。教科書 P219 の演習問題解答を見て下さい。