2006 年度統計力学 II 宿題 5 (5 月 17 日出題、5 月 24 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書 (9.37) 式と P141 の $f_{5/2}(z)$ の展開式から (9.39) 式を導け。

[解答] 教科書 P138(9.24) の 1 行目の式

$$E = \frac{3k_{\rm B}T}{2}\frac{gV}{\lambda_T^3}f_{5/2}(z) \tag{1}$$

から出発する。P141 の展開式を代入すると、

$$E = \frac{3k_{\rm B}T}{2}\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\ln z)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}+\cdots\right] \tag{2}$$

$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\rm B}T}$ だから

$$E = \frac{3k_{\rm B}T}{2}\frac{gV(2\pi m k_{\rm B}T)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\ln z)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}+\cdots\right] \tag{3}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}(k_{\rm B}T\ln z)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\frac{(k_{\rm B}T)^2}{(k_{\rm B}T\ln z)^2}+\cdots\right] \tag{4}$$

(9.37) 式を代入

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{2}\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_{\rm F}^{5/2}\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\epsilon_{\rm F}}\right)^2+\cdots\right]^{5/2} \\ &\quad\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}(k_{\rm B}T)^2\epsilon_{\rm F}^{-2}\left\{1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\rm B}T}{\epsilon_{\rm F}}\right)^2+\cdots\right\}^{-2}+\cdots\right] \end{aligned} \tag{5}$$

教科書 (9.14) 式を使うと、

$$\frac{3}{2}\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_{\rm F}^{5/2} = \frac{3}{2}\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{3/2}\frac{6\pi^2 N}{gV}\epsilon_{\rm F} \tag{6}$$

$\hbar = h/2\pi$ だから

$$= \frac{3}{5}N\epsilon_{\rm F} \tag{7}$$

さらに、テーラー展開して、T の 4 乗以上を $\cdots$ と書くと、

$$= \frac{3}{5}N\epsilon_{\mathrm{F}}\left[1-\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}(k_{\mathrm{B}}T)^2\epsilon_{\mathrm{F}}^{-2}\left\{1+2\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right\}+\cdots\right] \tag{8}$$

さらに、計算して、T の 4 乗以上を $\cdots$ に入れると、

$$= \frac{3}{5}N\epsilon_{\mathrm{F}}\left[1-\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right] \tag{9}$$
$$= \frac{3}{5}N\epsilon_{\mathrm{F}}\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2+\cdots\right] \tag{10}$$

[問題 2.] ボース粒子の化学ポテンシャルが負なのはなぜか。

[解答] 4 月 19 日に配ったプリント「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi=\prod_k \Xi_k$ のように書ける。Ξ_k は、ボース粒子の場合、プリント P7 の (27)

$$\Xi_k=\sum_{n=0}^{\infty}\left(ze^{-\beta\epsilon_k}\right)^n \tag{11}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$ze^{-\beta\epsilon_k}<1 \tag{12}$$

$z=\exp[\beta\mu]$ だから、$\beta>0$ を使って、

$$\mu-\epsilon_k<0 \tag{13}$$

これはすべてのエネルギー準位 ϵ_k で、成り立たなければならない。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ϵ_0 とすると、

$$\mu<\epsilon_0 \tag{14}$$

であれば、$\epsilon_0\le\epsilon_k$ だから、全てのエネルギー準位で、(13) 式を満たす。$\epsilon_0=0$ としても一般性は失わないから、$\mu<0$ が示せる。