2006 年度統計力学 II 宿題 6 (5 月 24 日出題、5 月 31 日締め切り) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 粒子数を N とする。
(1) $\epsilon > 0$ で $D(\epsilon) = D_0\epsilon^n (n > 0)$、$\epsilon < 0$ で $D(\epsilon) = 0$ の時の T_c を求めなさい。
(2) $D(\epsilon)$ が (10.8) 式の時 $T < T_c$ のエントロピーと比熱を求めよ。

[解答] $\epsilon = 0$ の粒子数を N_0 とすると、ある温度 T での全体の粒子数 N は、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} - 1} + N_0 \tag{1}$$

と表せる。与えられた温度で転移が起こる粒子数は、右辺の 1 項目で $\mu = 0$ とした値だから、逆に、与えられた粒子数 N に対して転移温度 T_c を求めるには、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)d\epsilon}{e^{\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c} - 1} \tag{2}$$

を T_c について解けば良い。問題で与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{D_0\epsilon^n d\epsilon}{e^{\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c} - 1} \tag{3}$$

$x = \epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c$ に変数変換すると、

$$= D_0 \int_{0}^{\infty} \frac{(k_{\mathrm{B}}T_c)^n x^n k_{\mathrm{B}}T_c dx}{e^x - 1} \tag{4}$$

$$= D_0 (k_{\mathrm{B}}T_c)^{n+1} \int_{0}^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} \tag{5}$$

ボースアインシュタイン積分 $b_n(z)$ を使うと、

$$= D_0 (k_{\mathrm{B}}T_c)^{n+1} \Gamma(n+1) b_{n+1}(1) \tag{6}$$

ここで、$\Gamma(n)$ を表す。ツェーター関数 $\zeta(n)$ を使うと、

$$= D_0(k_{\mathrm{B}}T_c)^{n+1}\Gamma(n+1)\zeta(n+1) \tag{7}$$

T_c について解くと、

$$T_c = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}}\left(\frac{N}{D_0\Gamma(n+1)\zeta(n+1)}\right)^{1/(n+1)} \tag{8}$$

(2) エントロピーは、教科書 P154(10.37) 式で、$T < T_c$ では、$\mu = 0$ だから、

$$S = \frac{5PV}{2T} \tag{9}$$

PV は、授業で求めたので、

$$S = \frac{5k_{\mathrm{B}}V}{2\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{10}$$

λ_T は、ドブロイ波長 $h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}}T}$ を表す。

比熱は C_v、内部エネルギー E から求められるが、E は教科書 P149(10.18) 式で書けるので、授業で求めた PV を代入すると、

$$E = \frac{3V}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{11}$$

したがって、

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{NV} = \frac{15V}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{12}$$

[問題 2.] 2 次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？

[解答] 宿題 3、あるいは P144 演習問題 [5] で解いたように、2 次元平面では、状態密度が $D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2(\epsilon \geq 0)$ で表される。これを教 (1) 式の右辺第 1 項に代入すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\epsilon)}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon]-1}d\epsilon = \int_0^{\infty}\frac{mA}{\pi\hbar^2}\frac{d\epsilon}{\frac{1}{z}\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{13}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵ は充分小さいから $\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\epsilon] - 1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

したがって、いくら N を大きくしても、あるいは、T を小さくしても、(1) 式のように N_0 を必要としない。いつも、$N_0 = 0$ なので、転移は起こらない。