

2006 年度統計力学 II 宿題 7 (5 月 31 日出題、6 月 7 日締め切り) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書 P161 演習問題 [2] ただし、密度  $2 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$

[解答] 問題にあるように原子量は 87 だから、質量  $m$  は、 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$  をアボガドロ数とすると、

$$m = \frac{87}{N_A} = 1.45 \times 10^{-22} \text{g} = 1.45 \times 10^{-25} \text{kg} \quad (1)$$

$N/V$  は、 $\text{m}^{-3}$  に直して、

$$\frac{N}{V} = 2 \times 10^{19} \text{m}^{-3} \quad (2)$$

転移温度は、教科書 P150(10.26) 式から

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left( \frac{N}{2.61V} \right)^{2/3} \quad (3)$$

$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2\pi \times 1.45 \times 10^{-25} \times 1.38 \times 10^{-23}} \left( \frac{2 \times 10^{19}}{2.61} \right)^{2/3} \text{K} \quad (4)$$

$$= 1.36 \times 10^{-7} \text{K} \quad (5)$$

[問題 2.] 教科書 p160 演習問題 [1]

[解答] 教科書にあるように P155(10.40) 式と (10.41) 式を出発点にする。

(1) P221 の解答の通り

(2) (10.41) 式を  $T$  で微分するが、P155 の下にある 2 つの公式

$$z \frac{\partial}{\partial z} b_n(z) = b_{n-1}(z) \quad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3z b_{3/2}(z)}{2T b_{1/2}(z)} \quad (7)$$

を使う。(10.41) 式の 2 つの項の分母分子をそれぞれ微分すると、 $b_{3/2}(z)$

$$\frac{\partial}{\partial T} b_{5/2}(z) = \frac{\partial}{\partial z} b_{5/2}(z) \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right) \quad (8)$$

(6) 式から

$$= \frac{1}{z} b_{3/2}(z) \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right) \quad (9)$$

(7) 式から

$$= \frac{1}{z} b_{3/2}(z) \left( -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} \right) \quad (10)$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{b_{3/2}(z)} = \frac{-1}{\{b_{3/2}(z)\}^2} \frac{\partial}{\partial T} b_{3/2}(z) \quad (11)$$

$$= \frac{-b_{1/2}(z)}{z \{b_{3/2}(z)\}^2} \left( -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{3}{2T b_{3/2}(z)} \quad (13)$$

2つまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{b_{5/2}(z)}{b_{3/2}(z)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} + \frac{3b_{5/2}(z)}{2T b_{3/2}(z)} \quad (14)$$

2項目は、

$$\frac{\partial}{\partial T} b_{3/2}(z) = \frac{1}{z} b_{1/2}(z) \left( -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{b_{1/2}(z)} = \frac{-1}{\{b_{1/2}(z)\}^2} \frac{\partial}{\partial T} b_{1/2}(z) \quad (16)$$

$$= \frac{-b_{-1/2}(z)}{z \{b_{1/2}(z)\}^2} \left( -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} \right) \quad (17)$$

一緒にすると、

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} = -\frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{b_{3/2}(z)}{b_{1/2}(z)} + \frac{3b_{-1/2}(z) \{b_{3/2}(z)\}^2}{2T \{b_{1/2}(z)\}^3} \quad (18)$$

(14) 式と (18) 式から教科書 P221 の最後の式が導ける。ただし、赤字は、教科書の印刷ミスで、教科書では  $3/2$  となっているが、 $1/2$  が正しい。

(3) 付録 P196 の (F.5) 式から  $z \rightarrow 1$  とすると  $\ln z \rightarrow 0$  だから、 $n > 1$  のときは  $b_n(z) \rightarrow \zeta(n)$  だが、 $n < 1$  のときは  $b_n(z) \rightarrow \Gamma(1 - n)(-\ln z)^{n-1}$  となる。したがって、

$$b_{5/2}(z) \rightarrow \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (19)$$

$$b_{3/2}(z) \rightarrow \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \quad (20)$$

$$b_{1/2}(z) \rightarrow \sqrt{\pi}(-\ln z)^{-1/2} \quad (21)$$

$$b_{-1/2}(z) \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}(-\ln z)^{-3/2} \quad (22)$$

これらを教科書 P222 の一番上の式に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{C_v}{Nk_B} \quad (23)$$

$$\rightarrow \frac{1}{T_c} \left( \frac{45\zeta(5/2)}{8\zeta(3/2)} - \frac{9\zeta(3/2)}{4\sqrt{\pi}(-\ln z)^{-1/2}} - \frac{27\{\zeta(3/2)\}^2\sqrt{\pi}(-\ln z)^{-3/2}}{8 \times 2\{\sqrt{\pi}(-\ln z)^{-1/2}\}^3} \right) \quad (24)$$

$$= \frac{1}{T_c} \left( \frac{45\zeta(5/2)}{8\zeta(3/2)} - \frac{9\zeta(3/2)(-\ln z)^{1/2}}{4\sqrt{\pi}} - \frac{27\{\zeta(3/2)\}^2}{16\pi} \right) \quad (25)$$

$T > T_c$  から近づけたものと差を取ると、1項目は、互いにキャンセルする。2項目は、 $-\ln z \rightarrow 0$  なので、0になり、残った3項目から答えが求まる。