

2006 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 7 日出題、6 月 14 日締め切り) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 光子を理想ボース気体と見なす時、BEC がおこらないのは光子のどの性質によるか挙げ、理由を述べよ。

[解答] 性質: 任意の温度で化学ポテンシャルが 0

光子は粒子数が決まっていないため、化学ポテンシャルはいつも 0 となる。

理由: BEC は、ある温度  $T_c$  で、化学ポテンシャルが負から 0 になる転移なので、全ての温度で化学ポテンシャルが 0 ならば、BEC はおこらない。

[問題 2.] BEC を起こす粒子系で圧力に  $\epsilon = 0$  の項が寄与しないことを教科書 (10.40) から授業と別の方法で示せ。

[解答]  $T > T_c$  で寄与しないのは当たり前なので、 $T \leq T_c$  の場合を考える。(10.40) を書き換えて

$$C_v = \frac{15V k_B}{4 \lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (1)$$

これは、

$$E = \frac{3V k_B T}{2 \lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (2)$$

と等価になる。

教科書 P9(1.30) から

$$C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{NV} \quad (3)$$

だから、P7 の熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \quad (4)$$

$C_v$  は、 $T^{3/2}$  に比例しているので、

$$= \frac{5V k_B}{2 \lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (5)$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを  $A$  とすると、 $A = E - TS$  だから、(2) 式と (5) 式から

$$A = \frac{3V}{2} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - T \frac{5V}{2} \frac{k_B}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = -V \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (6)$$

P10 の表の 1.1 から、圧力  $P$  は、

$$P = - \left( \frac{\partial A}{\partial V} \right)_{NT} = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (7)$$

この式は、P147(10.10) 式の右辺の 2 項目、 $\epsilon = 0$  の項を 0 にしたものに他ならない。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳 (岩波書店) P228