

2006 年度統計力学 II 宿題の問題 (訂正版)

2006.7.13 担当 吉森 明

問題 1.(重要)

宿題 1. (4 月 12 日出題、19 日提出) 古典単原子理想気体

$$H = \sum_i^N \frac{1}{2m} |\mathbf{p}_i|^2 \quad (1)$$

N : 粒子数、 m : 質量、 \mathbf{p}_i : i 番目の粒子の運動量、について、温度 T 、体積 V 、 N が与えられている時、カノニカル分布から分配関数と、温度 T 、体積 V 、化学ポテンシャル μ が与えられている時、グランドカノニカル分布から大分配関数を求めなさい。

宿題 2. (4 月 19 日出題、26 日提出) 1 粒子のエネルギー固有状態が 3 個ある 3 準位系を考える。それぞれの状態のエネルギー固有値は、 $0, \epsilon, 2\epsilon$ で、粒子はたがいに相互作用していない理想気体とする。

(a) 温度 T の熱溜に接しているとし、粒子がフェルミ統計、ボーズ統計に従う場合のカノニカル分布における分配関数をそれぞれ求めなさい。ただし、粒子数は $N = 3$ する。

(b) さらに、化学ポテンシャルを μ の粒子溜めに接するとして、グランドカノニカル分布の大分配関数を求めなさい。ただし、 $\mu < 0$ とする。

宿題 3. (4 月 26 日出題、5 月 17 日提出) 面積 A の 2 次元平面に閉じ込められた質量 m のフェルミ粒子に対して、絶対零度でのフェルミエネルギー ϵ_F 、エネルギー E を A と粒子数 N の関数として求めなさい。ただし、内部自由度は考えなくて良い。

宿題 4. (5 月 10 日出題、17 日提出)[訂正] 状態密度 $D(\epsilon) = D_0 \epsilon^n (n > -1)$ のとき E と PV の関係を求めなさい。

ただし、 D_0 は、体積 V に比例する。

宿題 5. (5 月 17 日出題、24 日提出)[訂正] 教科書 (9.24) 式から、(9.37) 式と P141 の $f_{5/2}(z)$ の展開式を使って、(9.39) 式を導け。

宿題 6. (5 月 24 日出題、31 日提出)[訂正] 粒子数を N とする。

(1) $\epsilon > 0$ で $D(\epsilon) = D_0 \epsilon^n (n > 0)$ 、 $\epsilon < 0$ で $D(\epsilon) = 0$ の時の T_c を求めなさい。

ただし、 D_0 は体積に比例する。

(2) $D(\epsilon)$ が (10.8) 式の時 $T < T_c$ のエントロピーと比熱を求めよ。

宿題 7. (5月31日出題、6月7日提出) 教科書 P161 演習問題 [2] ただし、教科書の版の古い人は、密度 $2 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$ に訂正して下さい。

宿題 8. (6月7日出題、14日提出) 光子を理想ボース気体と見なす時、BEC がおこらないのは光子のどの性質によるか挙げ、理由を述べよ。

宿題 9. (6月14日出題、21日提出) [訂正] 授業で導いた光子の $D(\omega)$ を使って、体積 V の箱に閉じ込めた光子の全エネルギーを計算しなさい。

教科書 P158 の欄外注を使っても良い。

[注:] 教科書では $D(\omega)$ は、単位体積あたりになっていましたが、授業では、系全体の状態密度として定義したので、 V に比例します。授業でもきちんと説明しなくて申し分けありませんでした。

宿題 10. (6月21日出題、28日提出)[訂正] 異核 2 原子分子の比熱 C_V が

$$C_V = C_{VG} + C_{Vrot} \quad (2)$$

となる事を示しなさい。ここで、 C_{VG} と C_{Vrot} は、重心と回転を寄与を表す。また、 C_{Vrot} が低温で (8.12) 式になるのを導け。ここで、 $x \ll 1$ の時、 $\ln(1+x) = x + \dots$ となることを使って良い。

宿題 11. (6月28日出題、7月5日提出) 原子がボース粒子の等核 2 原子分子の比熱に対する回転の寄与を (8.12) 式のように低温で展開しなさい。

宿題 12. (7月5日出題、12日提出)

(1) P185 演習問題 [4]

(2) $f(M) = A_0 + A_2 M^2 + A_4 M^4$ で、 A_2 が正の場合と負の場合に、 $f(M)$ を最小にする M_0 と $f(M_0)$ をすべて求めよ



問題 2.(余裕があれば解くこと)

宿題 1. (4月12日出題、19日提出) 理想気体と考えられるものを授業で説明したもの以外に挙げ、理由を述べなさい。

宿題 2. (4月19日出題、26日提出) 粒子に区別がある古典力学に対応する統計に (マクスウェル-) ボルツマン統計がある。これは、粒子に番号をつけて微視的状态を数え、最後に粒子数 N の $N!$ で割る。問題 1. の 3 準位系で、カノニカル分布の分

配関数 ($N = 3$) と、グランドカノニカル分布の大配関数を求めなさい。また、粒子を区別するのにも関わらず、なぜ $N!$ で割るのか、説明しなさい。

宿題 3. (4月26日出題、5月17日提出) 教科書演習問題 p143[1]

宿題 4. (5月10日出題、17日提出)[訂正] 教科書 P144 演習問題 [5]

ただし、以下の [考え方] に従って、波数空間の積分で考えよ。ここで、2次元平面内の1辺 L の正方形の中に閉じ込められているとする。 $A = L^2$

[考え方] $D(\epsilon)$ は、そもそも教科書 P133 の (9.2) 式や (9.3) 式の \sum_k を、 ϵ の積分に置き換えたときに出てくるものだった。この因子が必要なのは、横軸に ϵ をとったとき、固有状態が等間隔に並んでいないためだ。

\sum_k を積分に直すのは、特に ϵ を積分変数にする必要はないので、ここでは、波数の積分を考える。波数空間では、固有状態は、 $2\pi/L$ の等間隔で並んでいるので、単に

$$\sum_k \rightarrow g \int d\mathbf{k} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^d \quad (3)$$

とすれば良い。ただし、 d は空間の次元を表していて、2次元だと $d = 2$ で、3次元だと $d = 3$ になる。 $d\mathbf{k}$ は、2次元だと、 $dk_x dk_y$ を、3次元だと $dk_x dk_y dk_z$ を表す。 g は、内部自由度 (スピン) の縮退度を表す。

宿題 5. (5月17日出題、24日提出)[訂正] ボース粒子の化学ポテンシャルが負なのはなぜか。

プリント「授業ノート1」で説明した大配関数の観点で考えなさい。

宿題 6. (5月24日出題、31日提出) 2次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか?

宿題 7. (5月31日出題、6月7日提出) 教科書 p160 演習問題 [1]

宿題 8. (6月7日出題、14日提出) BEC を起こす粒子系で圧力に $\epsilon = 0$ の項が寄与しないことを教科書 (10.40) から授業と別の方法で示せ。

宿題 9. (6月14日出題、21日提出) 教科書 P159(10.51) 式はどのような考えに基づいているかを説明しなさい。特に ω が小さいところでは厳密なことを示せ。(文献を調べても良いが、参考にした文献は明記する事。)

宿題 10. (6月21日出題、28日提出) 教科書演習問題 p131[1]

宿題 11. (6月28日出題、7月5日提出) H_2 のオルソ分子、パラ分子とは何か。その存在比を 1. と同様に低温で展開しなさい。

宿題 12. (7月5日出題、12日提出) 教科書 p185 演習問題 [3]