

2007 年度統計力学 II 宿題 3 (4 月 25 日出題、5 月 2 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 相対論効果が大きい時、

$$\epsilon_{\vec{l}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{l})|^{*1} \quad (1)$$

となる。 c が光速の時、 $D(\epsilon)$ を求めよ。ただし、 $\vec{k}(\vec{l})$ は以下とする。

$$\vec{k}(\vec{l}) = \frac{2\pi}{L}\vec{l} \quad (2)$$

$$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z) \quad (3)$$

$l_x = 0, 1, \pm 1, \dots$ である。 l_y, l_z も同じとする。

[解答] この場合も授業でやったのと同じ様に波数 $\vec{k}(\vec{l})$ で 1 粒子固有関数は特徴づけられる。したがって、やはり波数空間を考えて、1 つのエネルギー固有状態を波数空間の 1 点に対応させる。

$D(\epsilon)\Delta\epsilon$ は、 ϵ から $\epsilon + \Delta\epsilon$ にある準位の数だから、 0 から ϵ にある準位の数 $\Sigma(\epsilon)$ とすると

$$D(\epsilon)\Delta\epsilon = \Sigma(\epsilon + \Delta\epsilon) - \Sigma(\epsilon) \approx \frac{d\Sigma(\epsilon)}{d\epsilon}\Delta\epsilon \quad (4)$$

$\Sigma(\epsilon)$ は、授業と同じ様に波数空間の球の中に入っている点の数を数えれば良い。しかし、今回は半径が違って、数えるべき点は $c\hbar|\vec{k}| \leq \epsilon$ を満たす点だから、半径は $\epsilon/c\hbar$ となる。この球の体積を点の間隔の 3 乗で割れば、 $\Sigma(\epsilon)$ を計算できる。点の間隔は前と同じ $2\pi/L$ だから

$$\Sigma(\epsilon) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\epsilon}{c\hbar}\right)^3 \left(\frac{V}{8\pi^3}\right) \quad (5)$$

したがって、

$$D(\epsilon) = \frac{d\Sigma(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{4\pi}{(c\hbar)^3}\epsilon^2 \left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\epsilon^2 \quad (6)$$

*1 訂正: 板書は $c|\vec{k}|$ になっていましたが、 \hbar を加えて下さい。すみません。

[問題 2.] 教科書 P.144 [5] (3)

[解答] ここでは、P220 の解答と違って、授業で説明した方法で解答する。

出発点は、 $\epsilon_{\vec{l}}$ は、授業の内部自由度がある時と同じで、

$$\epsilon_{\vec{l}} = \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}(\vec{l})|^2 \quad \vec{k}(\vec{l}) = \frac{2\pi}{L} \vec{l} \quad (7)$$

ただし、波数ベクトルは 2 次元で、つまり $\vec{l} = (l_x, l_y)$ 、 $l_x = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 、 $l_y = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

1 粒子の固有状態が波数空間の点で表される事には変わらないが、2 次元空間に対応させる。したがって、 $\Sigma(\epsilon)$ は球ではなく、円の中の点の数を g 倍すれば良い。

$$\Sigma(\epsilon) = \text{半径} \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \text{の円の内側にある点の数} \times g \quad (8)$$

$$= g \frac{\text{円の面積}}{(\text{間隔})^2} \quad (9)$$

$$= g \frac{\pi \left(\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}} \right)^2}{\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2} = \pi g \left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \right) \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-2} = \frac{mA\epsilon}{2\pi\hbar^2} g \quad (10)$$

したがって、(4) 式から

$$D(\epsilon) = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} g \quad (11)$$

今、 $g = 2$ なので、

$$= \frac{mA}{\pi\hbar^2} \quad (12)$$

ϵ によらない定数になる。ただし、(12) 式が成り立つのは $\epsilon \geq 0$ だけで、 $\epsilon < 0$ では、 $D(\epsilon) = 0$ となる。