2007 年度統計力学 II 宿題 6 (5 月 16 日日出題、5 月 23 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.]

$$S = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{V,\mu} \tag{1}$$

を使って、理想フェルミ気体のエントロピーを温度 T で展開し、T の 1 乗の項[*1]まで求めよ。J は (9.19) 式から、$D(\epsilon)$ は (9.10) 式。p. 141 の展開式を使え。

[解答] 教科書 P10 の表 1.1 から $J = -PV$ だから P137 の (9.22) 式と同様な計算で

$$J = -\frac{gV}{\lambda_T^3} k_{\mathrm{B}} T f_{5/2}(z) \tag{2}$$

これをまず温度 T で展開する。P141 の $f_{5/2}(z)$ の展開を使うと、

$$J = -\frac{gV}{\lambda_T^3} k_{\mathrm{B}} T \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right] \tag{3}$$

$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$ だから

$$J = -\frac{gV(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2}}{h^3} k_{\mathrm{B}} T \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots\right] \tag{4}$$

$$= -\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (k_{\mathrm{B}} T \ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{(k_{\mathrm{B}} T)^2}{(k_{\mathrm{B}} T \ln z)^2} + \cdots\right] \tag{5}$$

$\mu = k_{\mathrm{B}} T \ln z$ だから

$$J = -\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \mu^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\frac{(k_{\mathrm{B}} T)^2}{\mu^2} + \cdots\right] \tag{6}$$

[*1] 訂正: 授業に出した問題では T^2 となっていましたが、間違いです。すみません。T^2 の項は 0 なので、T^2 までででも答えは変わりませんが、J で T^3 まで展開しないといけないので、P141 の公式では足りなくなります。したがって、訂正して下さい。

(1) 式から

$$S = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_{V,\mu} = \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\mu^{5/2}\left[\frac{5\pi^2}{4}\frac{k_\mathrm{B}^2 T}{\mu^2} + \cdots\right] \tag{7}$$

$$= \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\mu^{1/2}\left[\frac{5\pi^2}{4}k_\mathrm{B}^2 T + \cdots\right] \tag{8}$$

$\mu = k_\mathrm{B}T\ln z$ を使って (9.37) 式を代入、

$$S = \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_\mathrm{F}^{1/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\epsilon_\mathrm{F}}\right)^2 + \cdots\right]^{1/2} \times \left[\frac{5\pi^2}{4}k_\mathrm{B}^2 T + \cdots\right] \tag{9}$$

計算すると、

$$S = \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_\mathrm{F}^{1/2}\frac{5\pi^2}{4}k_\mathrm{B}^2\left[T - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\epsilon_\mathrm{F}}\right)^2 T + \cdots\right] \tag{10}$$

$$= \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_\mathrm{F}^{1/2}\frac{5\pi^2}{4}k_\mathrm{B}^2\left[T - \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{k_\mathrm{B}}{\epsilon_\mathrm{F}}\right)^2 T^3 + \cdots\right] \tag{11}$$

$\epsilon_\mathrm{F}^{1/2} = \epsilon_\mathrm{F}^{3/2}/\epsilon_\mathrm{F}$ だから、

$$\frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\epsilon_\mathrm{F}^{1/2}\frac{5\pi^2}{4} = \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\frac{\epsilon_\mathrm{F}^{3/2}}{\epsilon_\mathrm{F}}\frac{5\pi^2}{4} \tag{12}$$

教科書 (9.14) 式を使うと、

$$= \frac{gV(2\pi m)^{3/2}}{h^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{3/2}\frac{6\pi^2 N}{gV}\frac{1}{\epsilon_\mathrm{F}}\frac{5\pi^2}{4} \tag{13}$$

$\hbar = h/2\pi$ だから

$$= \frac{\pi^2}{2}N\frac{1}{\epsilon_\mathrm{F}} \tag{14}$$

これを (11) 式に代入すると

$$S = \frac{\pi^2}{2} N \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{F}}} k_{\mathrm{B}}^2 T + \cdots \tag{15}$$

[問題 2.] プリント「授業ノート 1」 p. 8 (20) 式で、無限等比級数の収束条件からボース粒子の化学ポテンシャルが負になることを導け。ただし、最低エネルギー準位は 0 とする。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_k \Xi_k$ のように書ける。Ξ_k は、ボース粒子の場合、プリント P7 の (27) 式

$$\Xi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z e^{-\beta \epsilon_k} \right)^n \tag{16}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$z e^{-\beta \epsilon_k} < 1 \tag{17}$$

$z = \exp[\beta \mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \epsilon_k < 0 \tag{18}$$

これはすべてのエネルギー準位 ϵ_k で、成り立たなければならない。
　もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ϵ_0 とすると、

$$\mu < \epsilon_0 \tag{19}$$

であれば、$\epsilon_0 \leq \epsilon_k$ だから、全てのエネルギー準位で、(18) 式を満たす。問題では $\epsilon_0 = 0$ なので、$\mu < 0$ が示せる。