2007年度統計力学II 宿題7 (5月23日日出題、5月30日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題1.] $D(\epsilon)$ を (10.8) 式を使って、BECの転移温度を求めなさい。

[解説] ここでは、まず考え方を説明します。解答は必ずしもこの通りでなくても構いません。解答例は後で示します。

授業では、

$$N_B \equiv \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{1}$$

とすると、$N < N_B$ で

$$N_0 \sim 0, \qquad N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1}, \qquad \mu < 0 \tag{2}$$

$N \geq N_B$ では、

$$N_0 \neq 0, \qquad N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} + N_0 = N_B + N_0, \qquad \mu \sim 0 \tag{3}$$

となる事を説明しました。ここで、N_0 は基底状態に入る粒子の数を表します。

上の説明は、温度 T を一定にして粒子数 N を変えているが、N を一定にして温度を変える事を考えます。上の式で T を動かして値が変るものは N_B で、$D(\epsilon)$ に教科書 P147(10.8) 式を入れると、

$$N_B = \int 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\sqrt{\epsilon}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]-1} \tag{4}$$

$x = \beta\epsilon$ に変数変換すると、

$$N_B = 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}\int\sqrt{xk_{\mathrm{B}}T}\frac{k_{\mathrm{B}}Tdx}{\exp[x]-1} \tag{5}$$

$$= 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}\int\frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{6}$$

(10.12) 式から、

$$\int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)b_{3/2}(1) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{7}$$

だから、$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使って、

$$N_B = 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{8}$$

$$= V\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{9}$$

これは、温度 T とともに N_B が下がっていくことを表しています。つまり、N を一定にして T を下げると、最初は、$N < N_B$ であっても、N_B が温度の 2 分の 3 乗で値が小さくなるために、ある温度で、$N > N_B$ となり、転移が起こります。

転移が起こる温度 T_c は、$N = N_B$ を満たす温度だから、

$$N = V\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T_c)^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{10}$$

T_c について解けば、答えが得られます。

[解答] 理想ボース気体では、粒子数 N を温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \sum_l \frac{1}{\exp[(\epsilon_l - \mu)/k_{\mathrm{B}}T]-1} \tag{11}$$

体積が充分大きいとき、この和は積分に直せるが、ボース-アインシュタイン凝縮が起こると、$\epsilon_l = 0$ の粒子数が無視できなくてなる。その転移は、温度を一定にすると、

$$N = N_B(T) = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T]-1} \tag{12}$$

となる粒子数で起こるが、粒子数を一定にすると、

$$N = N_B(T_c) = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c]-1} \tag{13}$$

を満たす温度 T_c で起こる。(12) 式に教科書 (10.8) 式を代入すると

$$N_B(T) = V\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}(k_\mathrm{B}T)^{3/2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{14}$$

だから、(13) を解くと、教科書 (10.26) 式が得られ、これが解答となる。

[問題 2.]　2 次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか。

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N のもとで、化学ポテンシャル μ は、

$$N = B_1(\mu) + B_2(\mu) \tag{15}$$

の方程式を解くことで得られる。ここで、

$$B_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1}d\epsilon, \qquad B_2(\mu) = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \tag{16}$$

$B_2(\mu)$ は、$\mu \to 0$ で発散するのは 2 次元でも同じ。

3 次元と違うのは、$B_1(\mu)$ についてで、P144 演習問題 [5] で解いた 2 次元平面の状態密度 $D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2(\epsilon \geq 0)$ を代入すると、

$$B_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1}d\epsilon = \int_0^{\infty}\frac{mA}{\pi\hbar^2}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta(\epsilon-\mu)]-1} \tag{17}$$

この積分は $\mu \to 0$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵ は充分小さいから $\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\epsilon]-1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、μ が 0 から充分離れていれば、$B_1(\mu)$ は V に比例するので、$B_1(\mu) >> B_2(\mu)$ となり、$B_2(\mu)$ は無視できる。しかし、μ が 0 に近づいてくると、$B_2(\mu)$ が発散するので、無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、$B_1(\mu)$ も $\mu \to 0$ で発散するので、すべての μ の値で $B_1(\mu) >> B_2(\mu)$ が成り立ち、常に $B_2(\mu)$ を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。